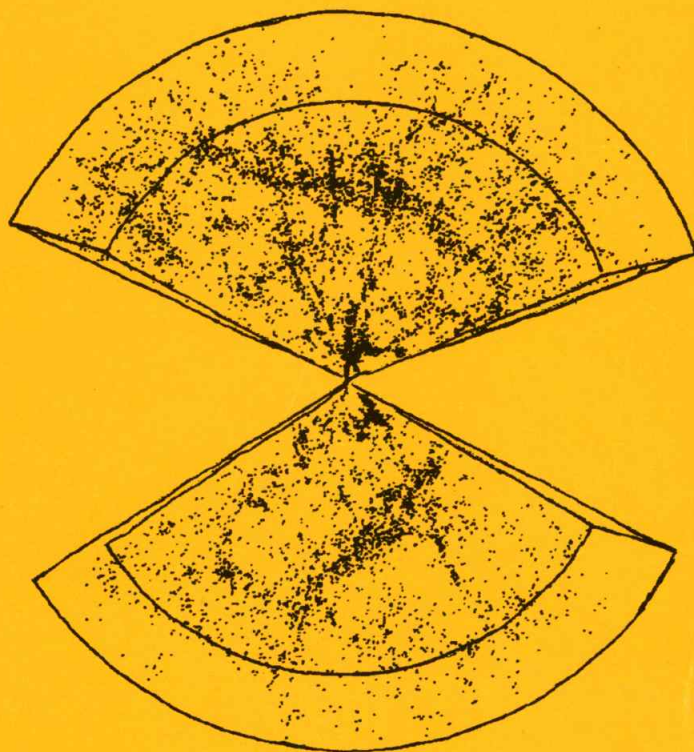


Universer og Universet

Kurt Jakobsen



Fysikforlaget

Kurt Jakobsen

Universer og Universet

- En introduktion til kosmologi på gymnasieniveau

Fysikforlaget

Universer og Universet
© 2003 Fysikforlaget og Kurt Jakobsen

Tryk: Budolfi Tryk, Aalborg

1. udgave 2003. Foreløbig version

ISBN 87-7792-026-0

Fysikforlaget, Slotsgade 2 III, 2200 København N
Tlf. 35 39 00 64 Fax: 35 39 48 14
www.lmfk.dk

Kopiering af dette kompendium er kun tilladt
i overensstemmelse med overenskomst mellem
de offentlige myndigheder og CopyDan

Indholdsfortegnelse

	Forord	s. 05
Kapitel 1	Hubble-revolutionen	
	1.1 Hvor lang er Mælkevejen ?	s. 07
	1.2 Er der andre Mælkeveje ?	s. 10
	1.3 Hubble-loven	s. 11
	1.4 Det kosmologiske princip	s. 13
	1.5 Skalafaktoren	s. 16
	1.6 Hubbletiden og hubblelængden	s. 17
	1.7 Det store brag og Det store knus	s. 18
Kapitel 2	Rødforskydning	
	2.1 Spektre	s. 21
	2.2 Rødforskydning	s. 23
	2.3 Derfor er stjernespektre rød/blå-forskudt	s. 25
	2.4 Udledning af Doppler-formlen	s. 26
	2.5 Derfor er galakse/kvasar-spektre rødforskudte	s. 27
	2.6 Teleskoper som tidsmaskiner	s. 28
	2.7 Fra rødforskydning til galakseafstand	s. 30
Kapitel 3	Ekkoer fra Big Bang	
	3.1 Sortlegeme-stråling	s. 33
	3.2 Sortlegeme-stråling i et ekspanderende univers	s. 37
	3.3 Den kosmiske baggrundsstråling	s. 38
	3.4 Massetæthed fra stof og fra stråling	s. 40
	3.5 Mørkt stof	s. 41
	3.6 Fotonafkoblingen	s. 42
	3.7 Lepton-epoken	s. 43
	3.8 Kernesyntesen	s. 45
Kapitel 4	Universet underlagt fysikkens love	
	4.1 Det teoretiske fundament	s. 48
	4.2 Friedmann-ligningen	s. 49
	4.3 Vacuummassetætheden	s. 52
	4.4 Krumning	s. 53
	4.5 Tidlige Big Bang universer	s. 54
	4.6 Fire historisk berømte Friedmann-universer	s. 54
	4.7 De kosmologiske standardenheder	s. 59
Kapitel 5	De mange muligheder	
	5.1 De grundliggende kosmologiske parametre	s. 62
	5.2 De forskellige typer Friedmann-universer	s. 63
	5.3 Beregning af et univers 'alder	s. 67
	5.4 Løsning af Friedmann-ligningen	s. 69
	5.5 Analytiske udtryk for skalafaktoren	s. 75

Kapitel 6	Beregning af afstande. Horisonter	
6.1	Fra rødforskydning til afstand	s. 78
6.2	Fotoner på vej	s. 80
6.3	Bevis for afstandsformlen	s. 82
6.4	Horisonter	s. 83
6.5	Horisontproblemet	s. 84
6.6	Horisonten flytter sig	s. 85
	Opgaver	s. 89
	Stikordsregister	s. 95
	Forslag til supplerende læsning	s. 96
	Konstanter	s. 97

Forord

Dette manuskript er tænkt dels som konkret undervisningsmateriale til kosmologidelen af det nye standardforsøg (2003-) i fysikhøjniveau i gymnasiet, dels som baggrundsmateriale for fysik- og astronomilærere samt andre interesserede.

Det nødvendige stof for at kunne opfylde kravene i fagbilaget og for at kunne regne de skriftlige eksamensopgaver er i det væsentlige samlet i de tre første kapitler, hvortil der også er skriftlige øveopgaver af varierende sværhedsgrad.

I fremstillingen er de anvendte matematiske begreber overalt søgt begrænset til, hvad der svarer til matematik på B-niveau. Dog benyttes i enkelte afsnit integralregning. Dette er ved hjælp af passende it-redskaber forsøgt gjort på en sådan måde, at læsere uden kendskab til integralregning alligevel gøres i stand til at kunne foretage relevante beregninger (hvorimod visse argumentationskæder/udledninger nok må overspringes).

I teksten er vist konkrete eksempler på brugen af især den grafiske lommeregner som hjælpemiddel til de i denne forbindelse nødvendige beregninger og graftegninger. På et enkelt punkt er en grafisk lommeregner som fx TI-83 dog ikke tilstrækkelig; nemlig i forbindelse med numerisk løsning af Friedmann-ligningen. Til at klare dette problem er der udarbejdet et brugervenligt Fpro-program, som kan rekvireres via Fysiklærerforeningens hjemmeside ("Undervisningsforløb" - "Faglig inspiration"), hvor supplerende materiale også kan dukke op.

På sidste side findes en liste over de vigtigste kosmologiske parametre taget fra *WMAP Best-Fit Cosmological Parameters* (April 2003). De anførte værdier kan meget vel afvige betydeligt fra angivne værdier i selv ret nye lærebøger i kosmologi. Dette afspejler det faktum, at der i de sidste ca. 10 år er foregået en datarevolution i den videnskabelige kosmologi, som i nogle tilfælde markant har ændret tidligere tiders ellers tilsyneladende veletablerede bedste bud, og i hvert fald har ført kosmologien ind i en ny æra, hvor de grundlæggende konstanter nu menes at være rimeligt velbestemte.

Tak til Jes Madsen fra Aarhus Universitet for en kritisk gennemlæsning af manuskriptet, således at de værste fejl skulle være luget ud.

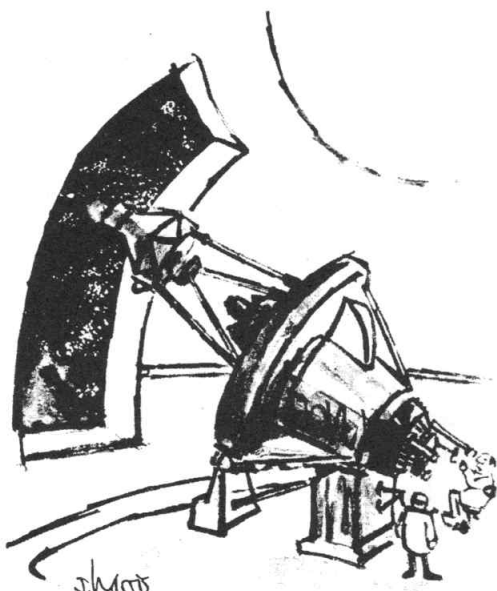
For forfatteren har det været vigtigt, at der allerede fra starten af standardforsøgsperioden forelå relevant undervisningsmateriale. Dette har betydet et stort tidspres i produktionsfasen, hvilket forklarer materialets især layout-mæssige noget foreløbige karakter. Med henblik på senere udgaver er kommentarer/forbedringsforslag af en enhver art yderst velkomne til forfatteren: Kurt.Jakobsen@Skolekom.dk.

Kurt Jakobsen
Ganløse juli 2003

Kapitel 1 Hubble-revolutionen

1.1 Hvor lang er Mælkevejen ?

Med det blotte øje kan man en mørk, stjerneklar nat se ca. 3000 stjerner. Stjernerne synes anbragt på en kugleskal (= *himmelkuglen*) med iagttageren i centrum. *Indbyrdes* har hver stjerne sin egen faste plads på himmelkuglen, men de indgår alle i et eller andet såkaldt *stjernebillede*. Der er dog undtagelser fra dette, idet der er nogle ganske få "stjerner", der i denne forbindelse skiller sig ud. Disse såkaldte *planeter* (= *vandrestjerner*) vandrer rundt på himmelkuglen. Bevægelsen kan ikke konstateres i løbet af en enkelt nat, men hvis man følger med på nattehimlen en uges tid, vil man undertiden kunne opleve planeternes dans gennem de uforanderlige stjernebilleder.



"Actually, they all look alike to me."



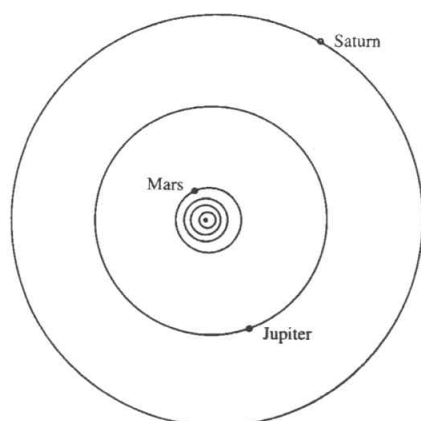
Fotoet viser spiralgalaksen M83.
Vores egen galakse Mælkevejen ser nogenlunde lige sådan ud. M83 er ikke medlem af Lokalhoben

Planeternes uregelmæssige bevægelser har fascineret alle kulturer, og indtil langt op i Middelalderen var det især denne detalje ved nattehimlen, som man prøvede at forklare/beskrive. Bestræbelserne mandede i 1500-tallet ud i erkendelsen af *Solsystemets* opbygning: Planeterne kredser i ellipseformede baner om Solen. Det er altså Solen og ikke Jorden, der er i centrum. Jorden er "blot" en af Solens satellitter; nemlig "the third stone from the Sun".

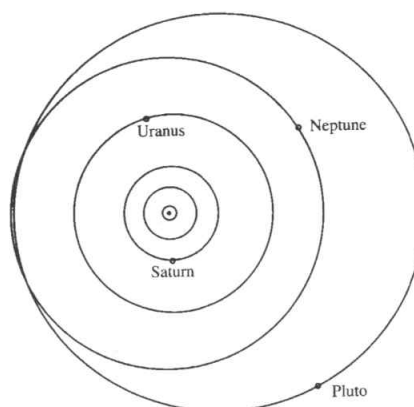
I denne fremstilling er det ikke Solsystemet, der er på programmet, og dermed heller ikke planeterne, der vil være i fokus. I stedet vil vi koncentrere os om det overvældende flertal af objekter, der ikke er planeter.

Det lysende bånd, der strækker sig hen over himmelkuglen, kaldes meget poetisk for *Mælkevejen*. Rettes en almindelig fuglekikkert mod dette lysbælte, så opløses det i et væld af enkeltstjerner. Det er således ret åbenbart, at stjernerne ikke er ligeligt fordelt på himmelkuglen. Men hvordan er stjernerne da fordelt i rummet ? Og hvor befinder vi os (= Solen) ?

Solsystemet tegnet i rigtigt målestoksforhold

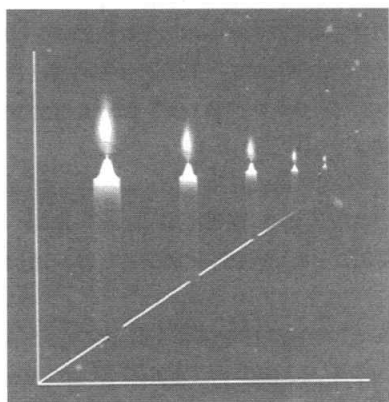


De inderste planeter med Solen i midten.
Regnet indefra: Merkur, Venus, Jorden, Mars, Jupiter og Saturn. For Merkur, Venus og Jorden er kun banerne vist. Der er ikke plads til navnene. Bemærk, at især Merkurs bane er tydeligt elliptisk.



De yderste planeter med Solen i midten.
Regnet indefra: ... Mars, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptun og Pluto. På denne skala er banerne for Merkur, Venus og Jorden for små til, at de kan ses. Især Plutos bane er tydeligt elliptisk.

For at kunne give et svar på det, er det nødvendigt at kunne måle store afstande i rummet. Det afgørende gennembrud med hensyn til dette kom i 1907 i forbindelse med undersøgelser af de såkaldte *cepheider*. Cepheider er en bestemt type stjerner, der udmærker sig ved, at deres lysstyrke ikke er konstant, men varierer på en karakteristisk, regelmæssig måde. Eksempelvis er Nordstjernen en cepheide. Den er i øvrigt den nærmeste. Perioden i variationen af den udsendte stråling er forskellig fra den ene cepheide til den anden, og er typisk af størrelsen nogle døgn. Den opdagelse, der skulle til, var, at en cepheides periode hænger sammen med cepheidens absolutte lysstyrke. Jo større absolut lysstyrke, jo større periode. Da man først eksperimentelt nøje havde etableret denne sammenhæng, kunne man ud fra den observerede periode for en cepheide, beregne sig til cepheidens absolutte lysstyrke. Herefter er det (for en astronom) en smal sag at beregne cepheidens afstand. Dette gøres simpelthen ved at sammenholde den absolutte lysstyrke med den observerede (= tilsyneladende) lysstyrke.

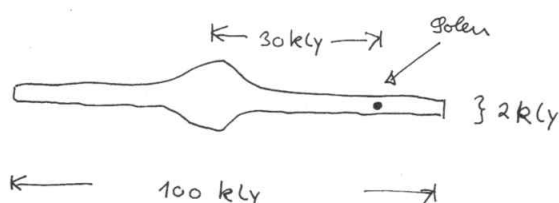


Man kan både ud fra dens størrelse og dens lysstyrke afgøre, hvor langt væk hver flamme er. Metoden anvendelighed kræver selvfølgelig en forhåndsviden om, at alle stearinlysene er ens.

Omkring 1920 var astronomernes store kikkerter, *teleskoperne*, blevet så slagkraftige, at de kunne identificere enkelt-cepheider i afstande ud til nogle tusinde lysår, og det moderne billede af det nære univers blev blotlagt for første gang:

Stort set alle de stjerner, som vi ser på nattehimlen, er samlet i en flad skive-lignende formation. Solen er placeret ca. $2/3$ ude mod kanten. Se figuren nedenfor. Når vi fra denne plads kigger langs skiven, vil øjet møde en masse stjerner, og det er netop derfor, at mælkevejsbåndet på nattehimlen opstår. Antallet af stjerner i skiven er af størrelsesordenen 200 milliarder, og skivens dimensioner er angivet på af figuren nedenfor.

En forsamling af et stort antal (= milliarder) stjerner kaldes i dag en *galakse*. Vores galakse har fået navnet *Mælkevejen*. Denne betegnelse står følgelig både for den galakse, som vi bor i, og for det lysende bånd hen over nattehimlen.



Figuren er en skematisk tegning af Mælkevejs-galaksen set fra siden.
De angivne mål er anført i længdeenheden kly (= kilolightyear = 1000 lysår).

1.2 Er der andre Mælkeveje ?

Efter afklaringen i 1920 af vores egen Mælkevejs størrelse, gik jagten omgående ind på andre galakser. Er Mælkevejs-galaksen den eneste galakse i Universet ? Er der andre galakser ? De første originale ideer om eksistensen af et såkaldt *ø-univers*, altså et univers, hvor stjernerne er klumpet sammen i store adskilte øer, fremkom allerede i 1700-tallet. I denne forbindelse nævnes ofte filosofen *Immanuel Kant*, der i 1755 udgav en bog, hvori han beskrev et univers med en stor skiveformet Mælkevej omgivet af andre lignende "mælkeveje". Kant så også forbindelsen mellem mælkevejsbåndet på nattehimlen, og vores (= Solens) placering et eller andet sted inden for denne skive. Kants synspunkt forblev dog i ca. 150 år et klart mindretals-synspunkt. Det var fra starten en rent teoretisk tankekonstruktion uden nogen eksperimentel opbakning.

I 1924 lykkedes det den amerikanske astronom *Edwin Hubble* som en af de første at identificere enkelt-cepheider i nogle af de såkaldte *stjernetåger*. Disse stjernetåger er tågede objekter på nattehimlen. Ved hjælp af et tilstrækkelig stærkt teleskop kan de opløses i en masse enkeltstjerner. I dag ville vi kalde det en galakse. Ved hjælp af cepheidemetoden kunne afstandene ud til stjernetågerne nu bestemmes med nogenlunde sikkerhed.

Konklusionen var ret klar: De betragtede stjernetåger lå uden for Mælkevejsgalaksen !

Der er følgelig en verden uden for vores galakse. Der findes andre galakser. Universet er ikke et enkelt-ø-univers, men et mange-ø-univers.

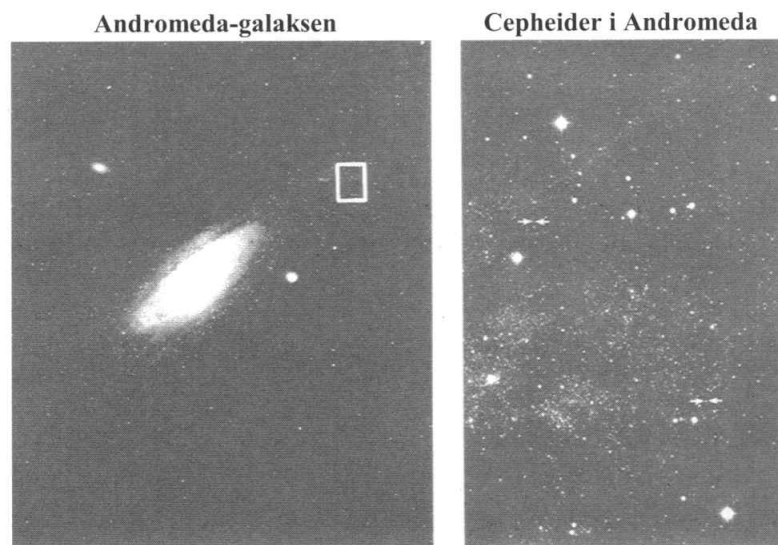
Med denne erkendelse blev verden på en gang svimlende stor. Blandt andet målte Hubble afstanden ud til vores nærmeste store nabogalakse, *Andromeda-galaksen*, til 900 kly. (Senere mere nøjagtige målinger har vist, at tallet snarere er 2,6 Mly).

I dag kendes hundredevis af milliarder galakser, hver indeholdende milliardvis af stjerner. Mens det blotte øje stjerner skal tælles i tusinder, så skal teleskopernes stjerner tælles i 10^{20} .

Dette antal er ufatteligt stort: Forestil dig, at du stabler telefonbøger ovenpå hinanden, indtil stakken når helt op til Solen. Så er antallet af stjerner ikke antallet af telefonbøger, men antallet af skrifttegn i alle disse telefonbøger !

Nogle galakser i rummet er klumpet sammen i endnu større enheder: *galaksehobene*. Antallet af galakser i en galaksehob varierer fra nogle få (under ti) til tusinder. Mælkevejs-galaksen og Andromeda-galaksen er begge medlemmer af en forholdsvis lille galaksehob kaldet *Lokalhoben*. De to nævnte galakser er de største i vores galaksehob. Andromeda-galaksen er den største. Den indeholder ca. 50% flere stjerner end Mælkevejen.

Det er dog sådan, at langt de fleste galakser i rummet er alene. De er ikke medlem af nogen tæt galaksehob.



Andromeda-galaksen dækker et område på himlen, som er ca. fem gange så stort som den fulde Måne. Under gunstige observationsforhold kan galaksens centrale kerne ses med det blotte øje. Figuren til højre er en forstørrelse af det viste hvide rektangel i udkanten af Andromeda-galaksen. Pilene markerer beliggenheden af to af de cepheider, som Hubble med succes benyttede til at fastslå, at Andromeda-galaksen er rigtig langt væk.

Størrelsesforhold i Universet

Jordens diameter	10^{-15} Mly
Jordbanens diameter	10^{-11} Mly
Udstrækningen af Solsystemet	10^{-9} Mly
Typisk afstand mellem to nabostjerner i en galakse	10^{-5} Mly
Typisk udstrækning af en galakse	0,1 Mly
Typisk afstand mellem to nabogalakser	1 Mly

Længdeenheden 1Mly ($= 1 \cdot 10^6$ lysår) er lig $9,47 \cdot 10^{21}$ m.

1.3 Hubble-loven

Hubble fortsatte sine undersøgelser af stjernetågerne, og i 1929 kunne han fremlægge data for 24 tåger. Disse data skulle revolutionere vores forestillinger om Universet. Hubble havde for hver tåge målt både afstand og hastighed. Resultatet gav ham og resten af verden en solid overraskelse:

Så godt som alle galakser bevæger sig systematisk væk fra os



Edwin Hubble (1889-1953)

Endvidere synes det at være sådan, at *flugthastigheden er proportional med, hvor langt galaksen er væk*. "Dobbelt så langt væk er galaksernes hastighed dobbelt så store".

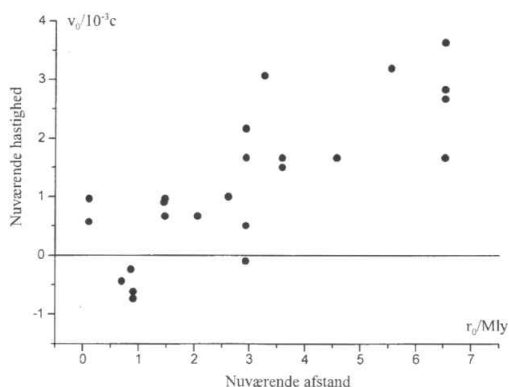
Denne lovmæssighed kaldes i dag *Hubble-loven*:

$$v_0 = H_0 \cdot r_0$$

(1.1)

Hubble-loven gælder for hver enkelt galakse, hvor v_0 angiver galaksens nuværende hastighed, r_0 galaksens nuværende afstand, og H_0 er kosmologisk konstant, der kaldes *Hubbleparametren*. Pointen er her, at H_0 er den samme for alle galakser.

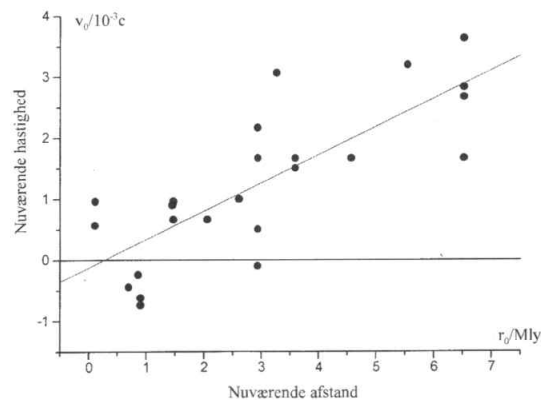
Hubbles originale data fra 1929



Når man betragter Hubbles 1929-data, så er det umiddelbart tydeligt, at på nær nogle få undtagelser er alle de målte hastigheder positive: Det vil sige, at alle de pågældende galakser bevæger sig *væk* fra os. Endvidere aflæses på figuren en tydelig tendens: Jo større afstand r_0 , jo større hastighed v_0 . Om den nærmere sammenhæng mellem v_0 og r_0 skrev Hubble i sin oprindelige artikel: "... a linear relation fairly accounts for the observed velocities available ...".

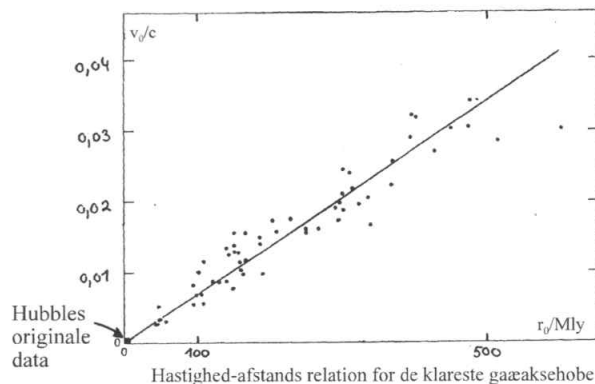
Man må sige, at det er et frisk bud at foreslå en *lineær* sammenhæng på grundlag de foreliggende data. Men Hubbles fornemmelse har vist sig at være rigtig. Der *er* en lineær sammenhæng.

Hubbles originale data fra 1929 med den bedste rette linje indtegnet



Den indtegnede rette linje på figuren har hældningen $0,45 \cdot 10^{-3} \text{ c/Mly} = 45 \cdot 10^{-11}/\text{år}$. Dette er jo netop Hubble-parametren H_0 . Senere og mere nøjagtige målinger har vist, at Hubble undervurderede galakseafstandene med en faktor ca. 5. Som konsekvens af dette er den rigtige værdi for H_0 ca. 5 gange mindre, end den lige citerede.

Hubble-grafen et halvt århundrede senere



Den rette linje på figuren har hældningen $6,7 \cdot 10^{-5} \text{ c/Mly}$. Dette betyder, at Hubble-parametren på grundlag af disse data må tildeles værdien $H_0 = 6,7 \cdot 10^{-5} \text{ c/Mly} = 6,7 \cdot 10^{-11}/\text{år} = 0,067/\text{Går}$.

De metoder, man har til at måle afstande uden for cepheide-området (afstande større end ca. 100 Mly), er ikke særlig pålidelige, og de tages igen og igen op til kritisk vurdering. Dette har ført til en del uenighed blandt kosmologer om, hvad den rigtige værdi for Hubbleparametren egentlig er. I marts 2003 opnåedes for første gang i kosmologiens historie en slags konsensus om "den rigtige værdi" for H_0 med et usikkerhedsinterval på bare 5 %:

$$H_0 = 0,0726/\text{Går} = 2,30 \cdot 10^{-18} / \text{s} \quad (1.2)$$

I stedet for at udtrykke H_0 i enheden år^{-1} bruges ofte enheden km/s pr. Mly :

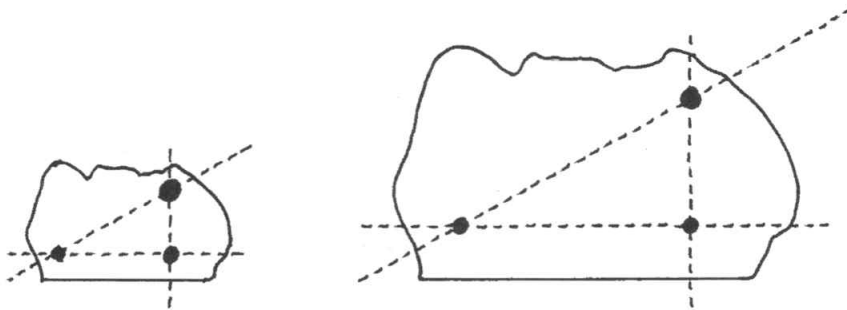
$$H_0 = 2,30 \cdot 10^{-18} / \text{s} = 22 \text{ km/s pr. Mly} \quad (1.3)$$

Fortolkning Hvis en galakse befinder sig i afstanden 1 Mly, så er dens flugthastighed 20 km/s. Hvis galaksen befinder sig i den dobbelte afstand, så er dens flugthastighed dobbelt så stor ...

1.4 Det kosmologisk princip

Hubbles opdagelse af, at alle galakser systematisk bevæger sig væk fra netop os, betyder, at vi synes at være i centrum for et eksploderende univers. Det er vi for så vidt også. Men som vi skal se, så medfører den måde, på hvilken kosmologer beskriver Universet, at alle galakse-iagttagere på helt tilsvarende vis vil opleve, at det er dem, der er i centrum. Den endelige konklusion viser sig at være, at Universet ikke har noget centrum. Eller for den sags skyld: ethvert sted i Universet er centrum.

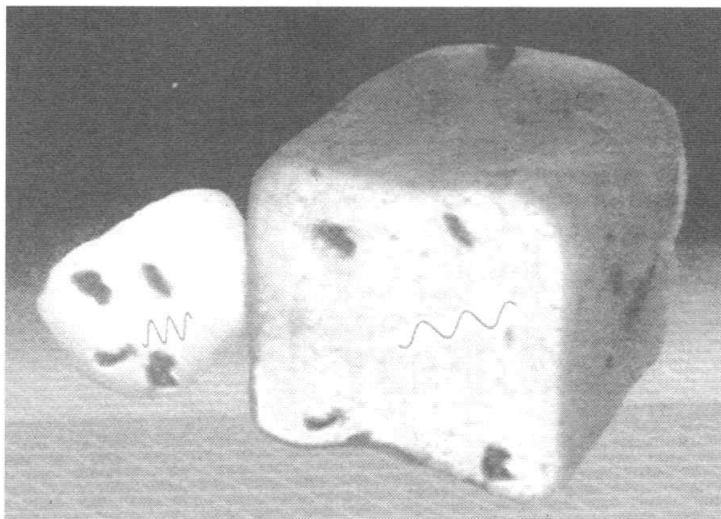
Hubbles iagttagelser fortolkes nemlig i dag ved hjælp af den såkaldte *rosinkage-model* for Universet. I denne *model* ansues galakserne i Universet som rosiner i en kage, der hæver ligeligt overalt. Med dette menes, at de indbyrdes afstande mellem rosinerne i et vist tidsrum alle forøges med den *samme* faktor. (Afstandene bliver i løbet af et vist tidsrum alle eksempelvis tre gange så store). Selve rosinerne tænkes ikke at ændre størrelse.

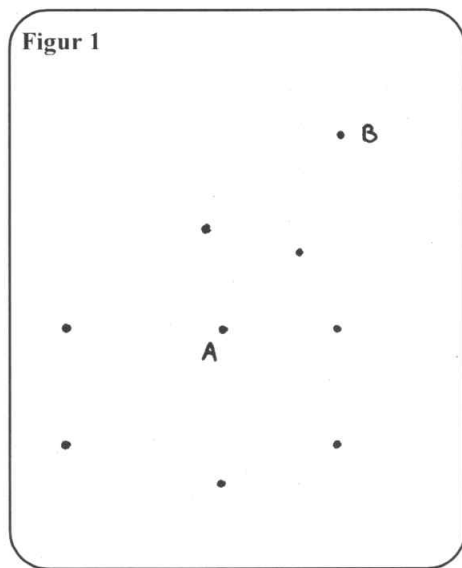


Rosinkagemodellen. Under hævnningen af kagen bevæger rosinerne (= galakserne) sig væk fra hinanden på en sådan måde, at alle indbyrdes afstande øges med *den samme* faktor (på figuren er alle indbyrdes afstande fordoblet). Det er endvidere antydnet, at en given sigtelinjes retning ikke ændres under udvidelsen. Læg mærke til, at rosinerne bevarer deres størrelse.

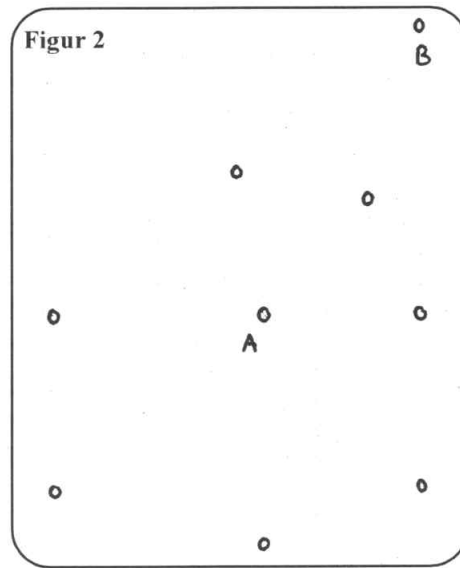
De følgende figurer illustrerer, at i et univers, der vokser på en sådan måde, at alle indbyrdes afstande bevares, der vil enhver galakse-iagttagere sige, at det netop er ham, der er i centrum af et eksploderende univers.

Rosinkage

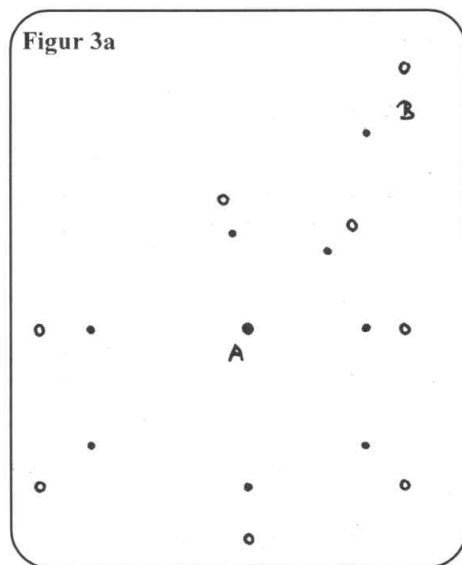




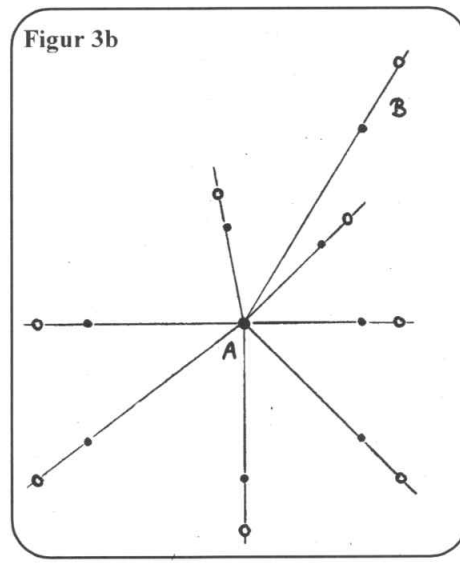
Et udsnit af Universet, der viser 9 galakser



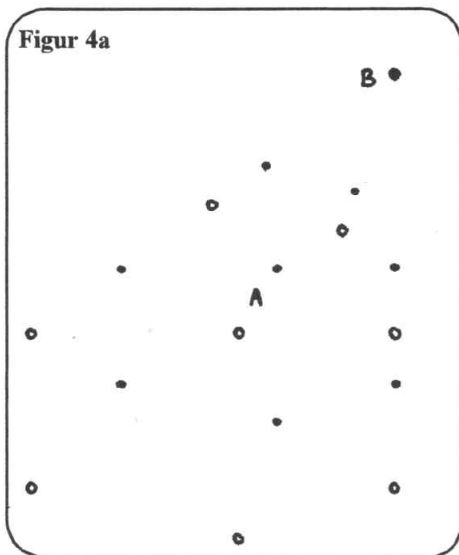
Det samme udsnit af Universet et passende tidsrum senere. Denne figur er en forstørret udgave af Figur 1. Alle indbyrdes afstande er blot øget 33%



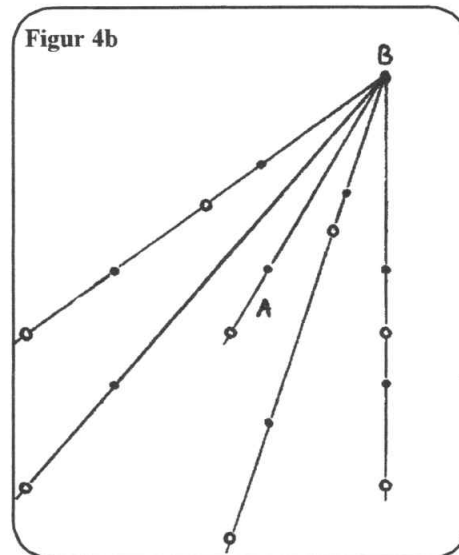
Denne figur er fremkommet ved at lægge Figur 1 oven på Figur 2, således at galakse A falder i galakse A. Herved synes alle galakser at flygte væk fra netop A.



Samme figur som Figur 3a. Her er blot indtegnet nogle hjælpelinjer, som tydeliggør, at A er i centrum af et eksploderende univers



Denne figur er i lighed med Figur 3a fremkommet ved at lægge Figur 1 oven på Figur 2. Men her sådan, at galakse B falder i galakse B. Herved synes alle galakser at flygte væk fra netop B.



Samme figur som Figur 4a. Her er blot indtegnet nogle hjælpelinjer, som tydeliggør, at B er i centrum af et eksploderende univers

Rosinkage-modellen er i overensstemmelse med den helt grundliggende kosmologiske antagelse, som går under navnet *Det kosmologiske princip* :

Til et givet tidspunkt ser Universet over kosmologiske afstande ens ud; uanset hvorfra det betragtes.

Det kosmologiske princip er en *global* egenskab ved Universet. Selvom der selvfølgelig er lokale forskelle på omverden set fra fx Solens indre og Andromeda-galaksens yderste spiralarm, så er antagelsen, at betragtet på en tilstrækkelig stor skala, så ser Universet mere eller mindre ens ud.

To umiddelbare konsekvenser af Det kosmologiske princip er, at Universet er *homogent* og *isotropt* (= ens i alle retninger).

Det skal bemærkes, at Det kosmologiske princip siden 1960'erne nærmest har haft karakter af et moderne dogme. Der er dog i de senere år fremkommet overbevisende eksperimentelle data, der meget direkte understøtter påstanden.

Kosmolog *George Ellis*: "We are unable to obtain a model of the Universe without some specifically cosmological assumptions which are completely unverifiable".

Kosmolog *Edward Harrison*: "The problem is that we observe isotropy, which we cannot explain, and assume homogeneity, which we cannot verify".

1.5 Skalafaktoren

Til nærmere at beskrive tidsudviklingen i rosinkagens størrelsesforhold indføres den såkaldte *skalafaktor* $\mathfrak{R}(t)$.

$\mathfrak{R}(t)$ angiver hvor mange gange større afstanden til tiden t er mellem to givne galakser i forhold til nu.

$$r(t) = \mathfrak{R}(t) \cdot r_0, \quad \mathfrak{R}(t_0) = 1 \quad (1.4)$$

$r(t)$: afstanden fra os til en given galakse til tiden t

r_0 : galaksens nuværende afstand fra os (altså afstanden til tiden t_0 , hvor t_0 angiver "nu")

Hvis eksempelvis $\mathfrak{R}(30 \text{ Går}) = 5$, så betyder det, at alle afstande i Universet til tiden $t = 30 \text{ Går}$ er 5 gange så store som nu. I denne forbindelse betyder "nu" det tidspunkt, som opfylder ligningen $\mathfrak{R}(t) = 1$.

Eksistensen af en universel skalafaktor i Universet sikrer, at Universet overalt udvider sig lige meget. Om det i virkeligheden forholder sig sådan, må faktiske observationer afgøre. Teoretisk set er eksistensen af en skalafaktor en direkte konsekvens af Det kosmologiske princip.

En galakse i afstanden $r(t)$ vil i forhold til os have flugthastigheden $v(t) = r'(t)$.

Differentieres $r(t) = \mathfrak{R}(t) \cdot r_0$ med hensyn til t fås: $r'(t) = \mathfrak{R}'(t) \cdot r_0 \Leftrightarrow$

$$v(t) = \mathfrak{R}'(t) \cdot r_0 \quad (1.5)$$

I (1.5) indsættes specielt $t = t_0$: $v_0 = \mathfrak{R}'(t_0) \cdot r_0$. Dette er Hubble-loven i forklædning, hvilket kan indsættes ved at sætte

$$\mathfrak{R}'(t_0) = H_0 \quad (1.6)$$

Eksistensen af en universel skalafaktor medfører/forklarer således Hubble-loven.

Til ethvert tidspunkt t kaldes $\mathfrak{R}'(t)/\mathfrak{R}(t)$ for *rummets udvidelseshastighed*, og $\mathfrak{R}''(t)$ kaldes *rummets acceleration*. Ofte indføres den dimensionsløse størrelse a_0 ved

$$a_0 = \mathfrak{R}''(t_0)/H_0^2, \quad (1.7)$$

hvor a_0 kaldes rummets (nuværende) *accelerations-parameter*.

1.6 Hubbletiden og hubblelængden

Eftersom de tidsrum, der typisk optræder i forbindelse med kosmologiske begivenheder, er meget store, så er det i de fleste tilfælde upraktisk at bruge SI-tidsenheden sekund. I stedet benyttes ofte den såkaldte *hubbletid* defineret ved

$$T_H \equiv \frac{1}{H_0} \quad (1.8)$$

Ved at kombinere T_H og lysets hastighed c fås en "naturlig" kosmologisk længdeenhed. Den afstand, som lyset i vacuum tilbagelægger i løbet af tiden T_H kaldes *hubblelængden*:

$$L_H \equiv c \cdot T_H \quad (1.9)$$

Indsættes hubblelængden i Hubble-loven fås: $v_0 = H_0 \cdot r_0 \Leftrightarrow v_0 = H_0 \cdot L_H = H_0 \cdot c \cdot T_H = c$. Følgelig angiver hubblelængden den (nuværende) afstand, som en galakse skal være i, for at dens (nuværende) hastighed er lig lyshastigheden. Galakser, der befinder sig i endnu større afstande end L_H , har flugthastigheder større end c .

Det skal bemærkes, at disse overlyshastigheder ikke er i modstrid med relativitetsteoriens diktat om, at materielle legemer aldrig kan accelereres op til lyshastigheden c . Forklaringen er, at de omtalte hastigheder ikke er hastigheder *gennem* rummet. *Lokalt set* er enhver galakse jo i hvile.

Sammenfatning

<i>Skalafaktoren</i> $\mathfrak{R}(t)$	Gennemsnitsafstanden mellem to galakser i forhold til den nuværende afstand
<i>Hubbletiden</i> T_H	Universets alder, hvis størrelsen af den enkelte galakses flugthastighed har været konstant
<i>Hubblelængden</i> L_H	Den nuværende afstand, hvor flugthastigheden er lig lyshastigheden c

Ved indsættelse af værdien (1.2) for H_0 :

Betegnelse	Navn	Definition	Dagens bedste bud
H_0	Hubbleparametren	$\mathfrak{R}'(t_0)$	0,0726/Går
T_H	Hubbletiden	$1/H_0$	13,8 Går
L_H	Hubblelængden	$c \cdot T_H$	13,8 Gly

(1.10)

1.7 Det store brag og Det store knus

Det billede af rummet, som Hubble-loven giver anledning til, nemlig at alle galakser er på vej væk fra os, minder om efterdønningerne af en fjern eksplosion. Hvad hvis man "kørte filmen baglæns"? Ja; så ville alle galakserne komme nærmere og nærmere hinanden, og på et tidspunkt ville de samles i et enkelt punkt. Denne begivenhed, som muligvis virkelig har fundet sted, kaldes *Det store brag* (= *the Big Bang*).

Man kan forestille sig Big Bang som en gigantisk eksplosion, som "satte det hele i gang". Hvem/hvad der eventuelt udløste eksplosionen, aner man ikke, og vil formodentlig heller aldrig på naturvidenskabelig grundlag kunne finde ud af. Men efter eksplosionen kan vi prøve at anvende fysikkens love til at beskrive/forklare Universets udvikling. En sådan beskrivelse er i sidste halvdel af 1900-tallet gennemført med stor succes, og siden 1990'erne er Big Bang idéen blevet standardelement i enhver seriøs kosmologisk model.

I et Big Bang-univers har det mening at tale om Universets nuværende alder, t_0 , idet der er en begyndelse (en skabelse). Det er naturligt at fastsætte dette tidspunkt til $t = 0$.



"The big bang? Believe me, it was very, very, very, very, very, very big."

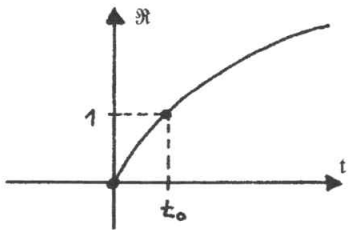
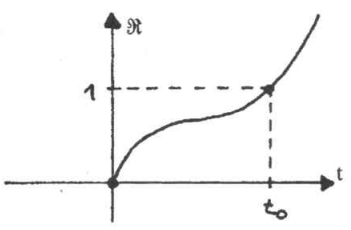
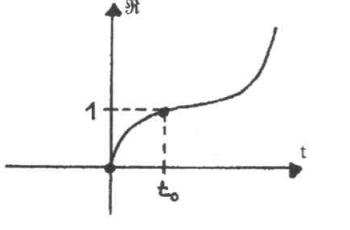
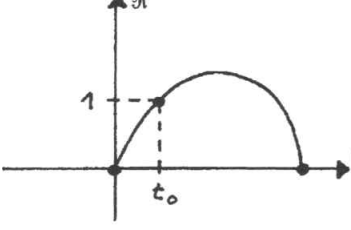
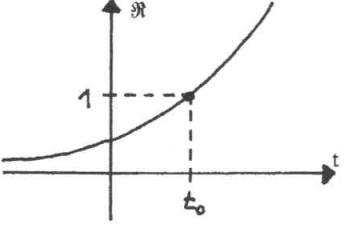
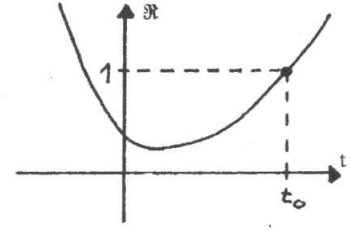
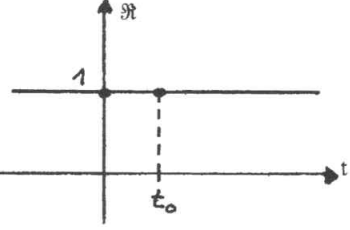
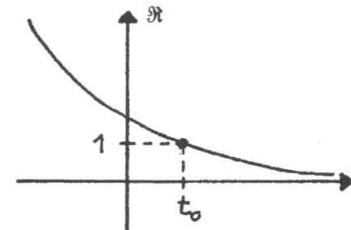
Ved kækt at antage, at den enkelte galakse *altid* har bevæget sig med den hastighed, som den har i dag, kan vi vurdere størrelsen af t_0 . (Den noget forenklede antagelse om galaksernes hastigheder svarer til den senere omtalte *Milne-model* af Universet).

Hvor lang tid Δt har det taget en galakse at nå ud i afstanden r_0 , hvis hastigheden har været konstant?

Svar: $v_0 = r_0/\Delta t \Leftrightarrow \Delta t = r_0/v_0$. Sammenholdes $\Delta t = r_0/v_0$ med Hubble-loven $v_0 = H_0 \cdot r_0$ indses, at $\Delta t = 1/H_0 = T_H$. Tidsrummet Δt bliver altså det samme for *alle* galakser, og må netop være lig den søgte alder t_0 .

Universets alder t_0 er følgelig af størrelsesordenen 15 mia. år. Dette er ca. 3 gange mere end Jordens alder, som geologer med stor sikkerhed sætter til 4,6 mia. år. Universets og Jordens alder regnes i milliarder af år, mens menneskets udviklingshistorie regnes i få millioner af år. Selvom Universet på nuværende tidspunkt udvider sig, så behøver denne ekspansion ikke at blive ved med at fortsætte. Det er muligt, at ekspansionsfasen efterfølges af en periode, hvor rummet trækker sig mere og mere sammen. En sådan kontraktion kan eventuelt ende i et slags "omvendt Big Bang": *Det store knus* (= *The Big Crunch*). På samme måde som et Big Bang betragtes som Universets fødsel, er et Big Crunch at betragte som Universets død. Et spørgsmål som "hvordan ser verden ud før og efter?" er meningsløst, idet også tiden henholdsvis skabes og destrueres i de to singulariteter. Universet er "det hele". Det er således en logisk kortslutning at forestille sig en iagttagere, der "udefra" betragter eksempelvis en eksploderende kugle fyldt med galakser.

Figurerne nedenfor viser eksempler på forskellige typer af universer, som man kunne tænke sig som relevante modeller for det rigtige Univers. I senere kapitler vil vi omtale, hvordan kosmologer nærmer sig et svar på spørgsmålet, hvordan skalafaktoren $\mathcal{R}$ i virkeligheden afhænger af tiden t .

 Big Bang start. Vedvarende ekspansion. Rummets accelerations-parameter a_0 er negativ.	 Big Bang start. Vedvarende ekspansion. Rummets accelerations-parameter a_0 er positiv.
 Big Bang start. Vedvarende ekspansion. Rummets accelerations-parameter a_0 er negativ.	 Big Bang start. En ekspansionsfase efterfølges af en kontraktion, der ender i et stort knus. Rummets accelerations-parameter a_0 er negativ.
 Ikke Big Bang start. Universet er uendelig gammelt. Vedvarende ekspansion. Rummets accelerations-parameter a_0 er positiv.	 Ikke Big Bang start. Universet er uendelig gammelt. En kontraktionsfase efterfølges af en ekspansion. Rummets accelerations-parameter a_0 er positiv.
 Ikke Big Bang start. Universet er statisk og uendelig gammelt. Såvel rummets udvidelseshastighed som dets acceleration er nul (i strid med Hubble).	 Ikke Big Bang start. Universet er uendelig gammelt. Vedvarende kontraktion. Rummets nuværende udvidelseshastighed er negativ (i strid med Hubble).

Som eksempler på modeluniverser beskrevet ved givne skalafaktorer nævnes allerede på nuværende tidspunkt fire stk.: *Milne-universet*, *Einstein/de Sitter-universet*, et *Sinus-univers* samt *År2003-universet*. I alle nedenstående forskrifter for $\mathfrak{R}(t)$ er det underforstået, at tiden t regnes i mia. år.

Relevante eksempler på modeluniverser

Modelunivers	Skalafaktor (t i mia. år)	Universets alder (mia. år)
Milne	$\mathfrak{R}(t) = 0,0725 \cdot t$	$t_0 = 13,8$
Einstein/de Sitter	$\mathfrak{R}(t) = 0,228 \cdot t^{2/3}$	$t_0 = 9,2$
Sinus	$\mathfrak{R}(t) = 1,260 \cdot \sin(0,1087 \cdot t)^{2/3}$	$t_0 = 7,2$
År2003	$\mathfrak{R}(t) = 0,452 \cdot (e^{0,0929 \cdot t} - e^{-0,0929 \cdot t})^{2/3}$	$t_0 = 13,7$

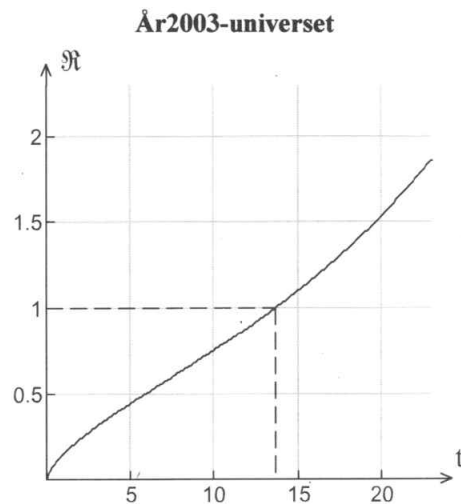
Eksempel År2003-universet

Universet beskrevet ved skalafaktoren $\mathfrak{R}(t) = 0,452 \cdot (e^{0,0929 \cdot t} - e^{-0,0929 \cdot t})^{2/3}$ kaldes i denne fremstilling for *År2003-universet* (eller *År2003-modellen*). Det var i marts år 2003 det bedste bud på skalafaktoren i det virkelige univers.

Af grafen ses, at År2003-universet starter med et Big Bang, og at det *ikke* ender med et stort knus. Tværtimod ses kurven at krumme opad, hvilket indikerer, at universet ender med at *accelererer* (altså at udvidelsen ikke blot fortsætter, men går hurtigere og hurtigere).

Universets alder bestemmes ud fra skalafaktoren ved at løse ligningen $\mathfrak{R}(t) = 1$, hvilket i dette tilfælde giver værdien $t_0 = 13,7$ mia. år.

Universets nuværende udvidelseshastighed $\mathfrak{R}'(t_0)$, findes lettest ved numerisk differentiation med et passende it-redskab som eksempelvis en grafregner. Resultatet er 0,0725 pr. mia. år.



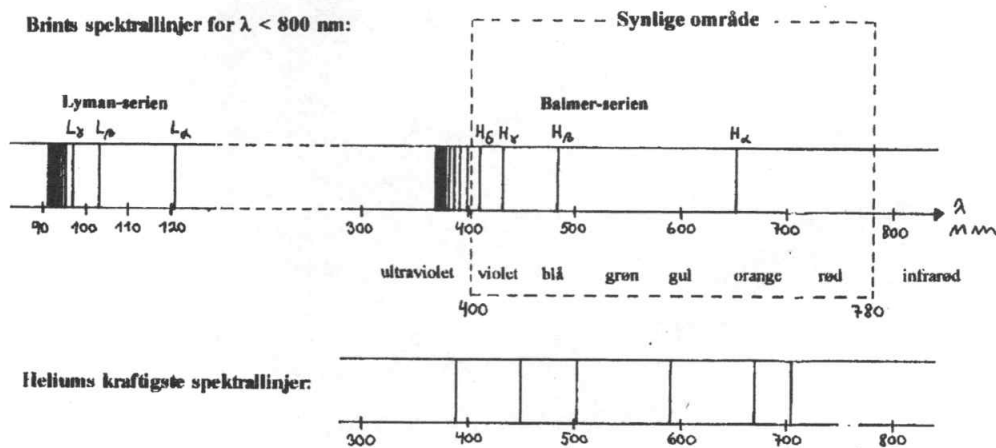
Dette er i fuld overensstemmelse med værdien (1.2) $H_0 = 0,0725/\text{Går}$ for Hubbleparametren. (Hvis der ikke var denne overensstemmelse, ville modellen egentlig være irrelevant, idet den så ikke ville være konsistent med grundlæggende *observerede* data).

Universets accelerations-parameter $a_0 = \mathfrak{R}''(t_0)/H_0^2$ findes ved først at udregne $\mathfrak{R}''(t_0)$. Numerisk differentiation på grafregneren giver $\mathfrak{R}''(t_0) = 0,00313 (\text{Går})^{-2}$. Følgelig fås $a_0 = 0,00313/(0,0726)^2 = +0,59$.

Kapitel 2 Rødforskydning

2.1 Spektre

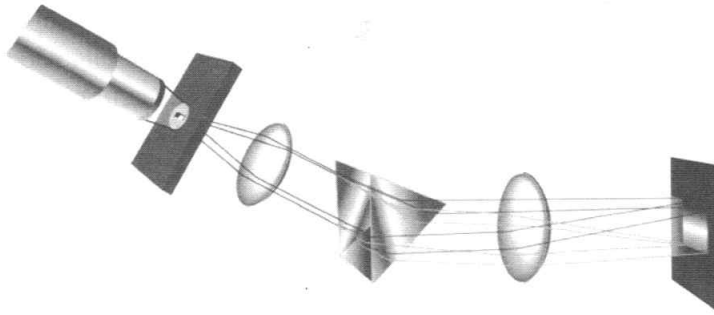
Grunden til, at vi overhovedet kan registrere eksistensen af stjerner og galakser, er, at de udsender elektromagnetisk stråling (synligt lys, radiobølger, infrarødstråling etc.). Denne stråling afslører ikke kun, at der i en bestemt retning findes et objekt, men eksempelvis også noget om objektets overfladetemperatur og stofsammensætning. Det er nemlig sådan, at overfladetemperaturen direkte kan beregnes ud fra farven, mens stofsammensætningen kan bestemmes ved at studere det *spektrum*, som strålingen giver anledning til. Et spektrum findes ved at lade strålingen fra objektet passere gennem enten et prisme eller et optisk gitter. Strålingen vil altid indeholde mere end én bølgelængde, og disse forskellige strålingskomponenter vil i prismet/gitteret blive afbøjet forskelligt afhængigt af bølgelængden. Typisk fås et såkaldt *linjespektrum*, det vil sige et spektrum, hvor visse bølgelængder udmærker sig markant. Det er ydermere sådan, at de forskellige grundstoffer giver anledning til hver deres karakteristiske kombination af bølgelængder (man taler undertiden om "grundstoffernes fingeraftryk"). Når sådanne karakteristiske bølgelængdemønstre konstateres i fx et galaksespektrum, er konklusionen klar: den pågældende galakse indeholder de og de grundstoffer! Men man kan slutte mere end det. Ud fra spektrallinjernes relative styrke er det nemlig muligt at udtale sig om den relative grundstofsammensætning; eksempelvis hvor meget hydrogen der er i forhold til helium.



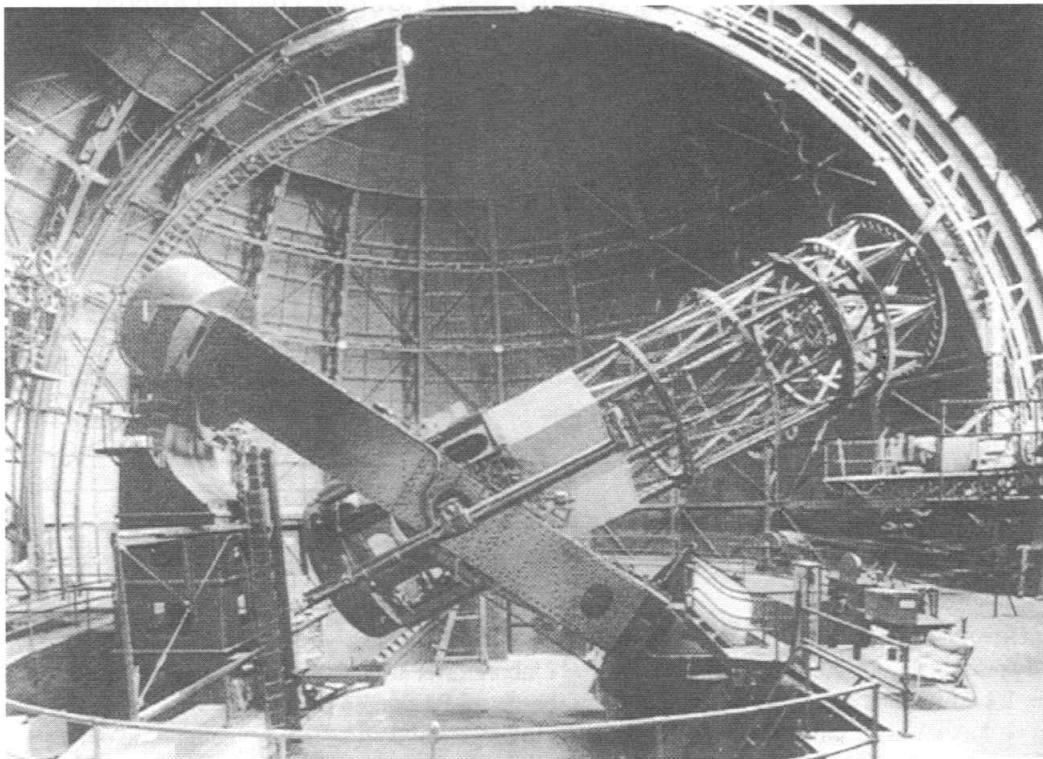
Standard-spektrene for henholdsvis hydrogen og helium

Ved standard-spektrret forstås det spektrum, man får ved i laboratoriet at måle hvilke bølgelængder den stråling, som udsendes fra en lysende gas af det pågældende stof, består af. På figuren ses de linjespektre, som henholdsvis hydrogen og helium giver anledning til. Det ses, at de to bølgelængdemønstre er tydeligt forskellige: hydrogen og helium har ikke samme "fingeraftryk".

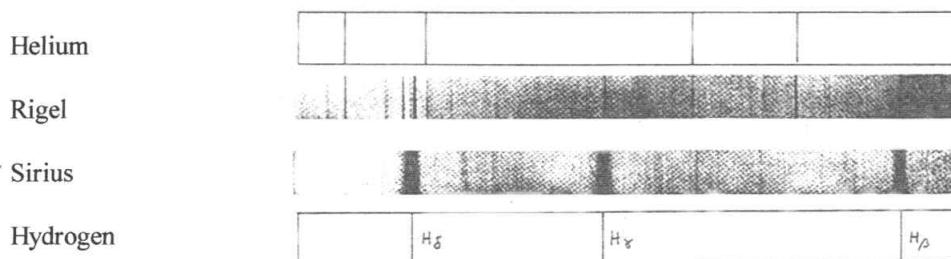
Bølgelængderne for nogle udvalgte spektrallinjer for hydrogen						
H_{α}	H_{β}	H_{γ}	H_{δ}	L_{α}	L_{β}	L_{γ}
656 nm	486 nm	434 nm	410 nm	122 nm	103 nm	97 nm



Spektroskopi Lyset fra fjerne galakser/stjerner opsamles i et stort teleskop. Lyset passerer først gennem en smal spalte, hvorefter det brydes i et prisme (eller et gitter) og spredes ud i et spektrum, som optages på en fotografisk plade. Linserne er indsat for at rette strålegangen op, så strålerne bliver parallelle.



Jordens øje Mount Wilson Observatoriets (Californien) store spejlteleskop var fra 1917 til 1947 verdens førende astronomiske teleskop. Selve spejlet med en diameter på 5 meter sidder i bunden af røret (til venstre i billedet). Det var med dette teleskop, at astronomen Edwin Hubble gjorde sin epokegørende opdagelse, at Universet ikke er statisk, men udvider sig. I de sidste 40 år har en hastigt voksende byudvikling kraftigt forringet nattehimmelen over observatoriet.



På figuren ses et udsnit af stjernespektret for henholdsvis Rigel (Orions ene knæ) og Sirius (Nattehimlens klareste stjerne). Til sammenligning er vist tilsvarende udsnit af standardspektrene for hydrogen (H) og helium (He). Umiddelbar konklusion: Der er både hydrogen og helium på Rigel. Der er hydrogen på Sirius.

I de i millionvis af stjerne- og galaksespektre, som astronomerne indtil i dag har studeret, er der aldrig fundet et bølgelængdemønster, som ikke kunne genkendes som et fingeraftryk, man kendte i forvejen fra laboratorieeksperimenter med jordiske stoffer. Dette er et meget overbevisende vidnesbyrd om, at de grundstoffer, som stjernerne/galakserne tilsyneladende er opbygget af, er de samme grundstoffer, som vi kender fra det periodiske system, og at de fysiske lovmæssigheder er universelle. Endvidere har de meget omfattende studier af spektre afsløret, at i Universet som helhed er der to grundstoffer, som i mængde er helt dominerende; nemlig hydrogen (~76 %) og helium (~24 %). De andre grundstoffer udgør tilsammen mindre end 1 % (denne ene procent er dog ikke uvæsentlig for os, idet deres tilstedeværelse er en absolut forudsætning for liv i den form, som vi kender).

2.2 Rødforskydning

Som omtalt har man aldrig hverken i et *galaksespektrum* eller i et *stjernespektrum* konstateret et bølgelængdemønster, som man ikke kunne henføre til et allerede kendt stof. Dog er *hele* mønstret for de enkelte stoffer næsten altid systematisk flyttet mod større eller mod mindre bølgelængder. Denne forskydning af spektrallinjerne kaldes for *rødforskydning*. Rødforskydningen sker altid sådan, at *alle* spektrallinjerne forskydes med den *samme* procentdel. Dette betyder, at fx hydrogenlinjerne ikke ligger, hvor de "burde" ligge, men at alle de velkendte standardspektrallinjer i spektret forekommer ved bølgelængder eksempelvis 2 % større end normalt (eventuelle heliumlinjer vil så ligeledes være forskudt 2 %).

Rødforskydningen af spektre hindrer ikke, at de enkelte grundstoffers karakteristiske bølgelængdemønstre stadig kan genkendes. Fx kan hydrogens fingeraftryk stadig registreres. Fingeraftrykket er så at sige bare blevet trukket lidt ud.

Hvor meget rødforskydningen er i et givet tilfælde, er bestemt af den fælles procentdel p , som de enkelte spektrallinjer er forskudt mod større bølgelængder. Den tilhørende brøkdelt kaldes *rødforskydningen* og betegnes med z :

$$z = \frac{p}{100} \quad \Leftrightarrow \quad 100 \cdot z = p$$

Hvis rødforskydningen fx er 4 %, så er $z = 0,04$. Hvis $z = 1,73$, så er rødforskydningen 173 %. Sådanne ekstremt store rødforskydninger fås fx for nogle særlige objekter i Universet; nemlig fra de såkaldte *kvasarer*.

Hvis spektrallinjerne i et spektrum forskydes mod mindre bølgelængder, så regnes procentdelen p (og dermed også z) negativ. I dette tilfælde tales ofte om *blåforskydning*.

Rødforskydningen z er jo defineret som den *relative* bølgelængdeændring, så:

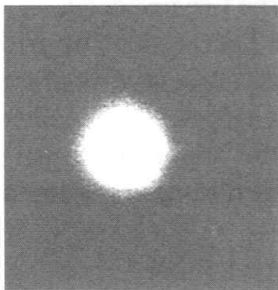
$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_e} \Leftrightarrow z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} \Leftrightarrow z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} - 1 \Leftrightarrow z + 1 = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} \quad (2.1)$$

λ_0 betyder den bølgelængde, som rent faktisk måles. λ_e betyder den tilsvarende bølgelængde i standardspektret.

Den sidste omskrivning viser betydningen af størrelsen $(z+1)$:

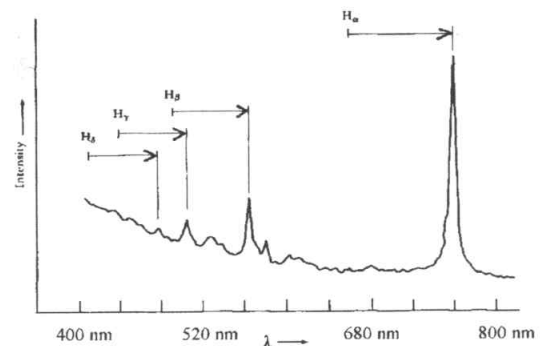
Størrelsen $(z+1)$ angiver den fælles faktor, som standardbølgelængderne skal ganges med for at få bølgelængderne i det observerede spektrum.

Kvasaren 3C 273



På figuren ses en kraftig forstørrelse af et foto af det stjernelignende objekt 3C 273. I 1963 fastslog astronomer, at denne "stjernes" rødforskydning er $z = 0,158$, hvilket i en første tilnærmelse svarer til en afstand på hele $L_H \cdot z = 13,8 \text{ Gly}$. $0,158 = 2,2 \text{ Gly}$ (Se afsnit 2.7).

Spektrum af 3C 273



I det viste spektrum for 3C 273 ses fire tydelige emissionslinjer, som kan identificeres som rødforskudte hydrogenlinjer.

Skemaet viser de *målte* bølgelængder (λ_0) for de fire hydrogenlinjer H_α , H_β , H_γ og H_δ i spektret for kvasaren 3C 273. Endvidere er de tilsvarende standardbølgelængder (λ_e) angivet.

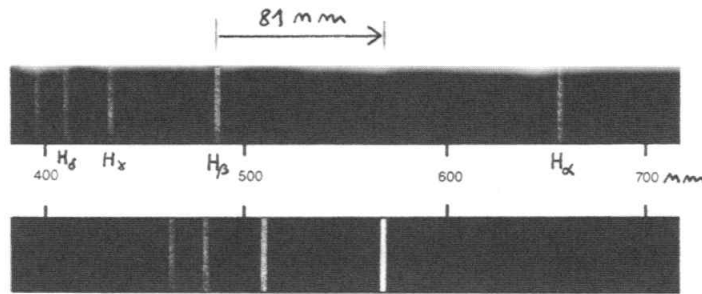
Spektrallinjer for hydrogen	H_α	H_β	H_γ	H_δ
Kvasarspektrum (λ_0)	760 nm	564 nm	503 nm	476 nm
Standard-spektrum (λ_e)	656 nm	486 nm	434 nm	410 nm

Udregnes forholdet mellem λ_0 og λ_e i hvert af de fire tilfælde fås:

$$760/656 = 1,16 \quad 564/486 = 1,16 \quad 503/434 = 1,16 \quad 476/410 = 1,16.$$

Heraf ses, at de fire hydrogenlinjer virkelig er forskudt den samme procentdel; nemlig 16 %.

Rødforskydningen z for den pågældende kvasar er da 0,16.



Øverst ses standard-spektret for hydrogen i det synlige område. Nederst det rødforskudte spektrum fra en kvasar. Den normalt røde linje (H_α) helt ude til højre er forsvundet ud i det infrarøde område, mens den normalt violette H_δ -linje i kvasarspektret vil observeres som blå/grøn.

Rødforskydningen: $z = \Delta\lambda/\lambda_e = 81/486 = 0,17$. Spektret er følgelig forskudt 17 %.

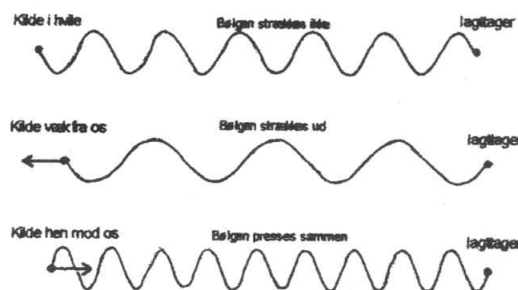
Det er en uomtvistelig eksperimentel kendsgerning, at for enhver af de milliarder af *galakser/kvasarer*, som kendes, er det observerede spektrum netop *rødforskudt*. Kun for ganske få galakser (under 10) fås en *blåforskydning*. Denne ensidige rødforskydning genfindes *ikke* i *stjernespektre*. Spektret for en stjerne er lige så ofte rødforskudt som blåforskuet. For nogle stjerner er rødforskydningen z positiv, mens z for andre stjerner er negativ. For alle stjerner i vor egen galakse er z numerisk meget lille (af størrelsesordenen 10^{-4}).

Forklaringen på disse forskydninger af spektrene vil du få i de næste afsnit. Her skal det blot bemærkes, at forklaringen på rødforskydningen af stjernespektre og af galaksespektre er fundamentalt forskellige !

2.3 Derfor er stjernespektre rød/blå-forskudte

Når vi observerer fx en lysbølge udsendt fra en kilde *i hvile*, vil vi pr. tid modtage nøjagtig lige så mange bølgetoppe, som der afsendes. Afsender og modtager er enige om værdien af bølgens frekvens f , og dermed også enige om værdien af bølgens bølgelængde λ . (Husk, at $\lambda \cdot f = c$).

Hvis kilden derimod bevæger sig *væk fra* os, vil vi pr. tid modtage *færre* bølgetoppe, end der emitteres, fordi hver bølgetop må rejse lidt længere end før, for at nå os. Analogt vil vi pr. tid observere *flere* bølgetoppe, hvis kilden bevæger sig *mod* os.



Kilden væk fra os : Den modtagne frekvens synes mindre. Den modtagne bølgelængde λ_0 synes *større* end den emitterede (udsendte) bølgelængde λ_e . Strålingen er *rødforskudt*.

Kilden mod os : Den modtagne frekvens synes større. Den modtagne bølgelængde λ_0 synes *mindre* end den emitterede (udsendte) bølgelængde λ_e . Strålingen er *blåforskuet*.

Dette bølgefænomen kaldes *Doppler-effekt*. Hvor meget bølgelængden ændrer sig afhænger af kildens hastighed v og kan udregnes ved *Doppler-formlen*:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = 1 + \frac{v}{c} \quad (2.2)$$

Når kilden fjerner sig, regnes $v > 0$. Når kilden nærmer sig, regnes $v < 0$. Formlen gælder kun for $|v| \ll c$.

Doppler-effekten forklarer på en enkel måde de observerede rød/blå-forskydninger af stjerne-spektrene. Sammenlignes ovenstående Doppler-formel med det generelle udtryk $\lambda_0/\lambda_e = 1+z$, fås

$$z = \frac{v}{c} \quad (2.3)$$

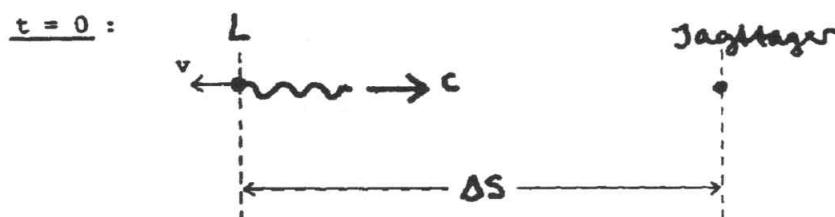
De nogenlunde lige hyppigt observerede blå- og rødforskydninger for stjernerne i Mælkevejen, kan følgelig fortolkes på den måde, at nogle stjerner fjerner sig fra Jorden, mens andre nærmer sig. Da de observerede rødforskydninger for disse stjerner ydermere er små; typisk $|z| \sim 10^{-4}$, er de hastigheder, som stjernerne åbenbart har, små i forhold til lysets hastighed c .

Selvom stjernernes typiske hastigheder er små i forhold til c , så overgår de langt, hvad fx selv de hurtigste flyvemaskiner kan præstere: $10^{-4} \cdot c = 30 \text{ km/s} = 108 \text{ tusinde km/h}$.

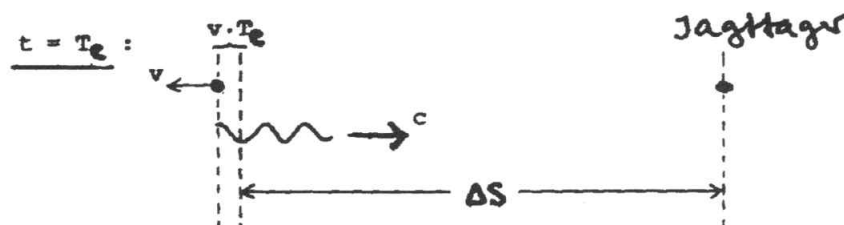
2.4 Udderelse af Doppler-formlen

Betragt en lyskilde L , der med hastigheden v bevæger sig væk fra en iagttager. Lyskilden udsender en elektromagnetisk bølge hen mod iagttageren. Til tiden $t = 0$ forlader en bølgetop L . Denne bølgetop når iagttageren til tiden $t_1 = \Delta s/c$.

En elektromagnetisk bølges hastighed i vacuum er altid c ; uafhængig af bølgegiverens eventuelle bevægelse !



Den næstfølgende bølgetop sendes afsted fra L tiden T_e senere, hvor T_e er svingningstiden, som L bedømmer den. Denne bølgetop når hen til iagttageren til tiden $t_2 = T_e + (T_e \cdot v + \Delta s)/c$.



Iagttageren modtager følgelig to nabotoppe med et tidsinterval på $T_0 = t_2 - t_1$, hvor T_0 angiver den svingningstid, som iagttageren oplever:

$$T_0 = t_2 - t_1 = T_e + (T_e \cdot v + \Delta s)/c - \Delta s/c = T_e + T_e \cdot v/c = T_e \cdot (1 + v/c) \Leftrightarrow T_0/T_e = 1 + v/c.$$

Eftersom der både gælder, at $c = \lambda_e/T_e$ og at $c = \lambda_0/T_0$ må $\lambda_e/T_e = \lambda_0/T_0 \Leftrightarrow T_0/T_e = \lambda_0/\lambda_e$.
Følgelig kan ovenstående resultat $T_0/T_e = 1 + v/c$ også skrives:

Doppler-formlen:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = 1 + \frac{v}{c}$$

λ_0 står for bølgelængden af den modtagne stråling.

λ_e står for bølgelængden af den emitterede (udsendte) stråling.

Hvis lyskilden L bevæger sig hen mod iagttageren skal v i ovenstående formel regnes negativ. I øvrigt gælder formelen kun for $v \ll c$ (i praksis skal v være mindre end ca. 10 % af lyshastigheden).

Konklusion:

Hvis en lyskilde bevæger sig *væk fra* en iagttager, vil det observerede lys være *rødforskudt*: $v > 0 \Leftrightarrow \lambda_0/\lambda_e > 1 \Leftrightarrow \lambda_0 > \lambda_e$; den observerede bølgelængde er *større* end den udsendte.

Hvis en lyskilde bevæger sig *hen mod* en iagttager, vil det observerede lys være *blåforskudt*: $v < 0 \Leftrightarrow \lambda_0/\lambda_e < 1 \Leftrightarrow \lambda_0 < \lambda_e$; den observerede bølgelængde er *mindre* end den udsendte.

2.5 Derfor er galakse/kvasar-spektre rødforskudte

Bibelen (Prædikernes bog):

"En slægt går, og en slægt kommer; men Jorden står evindeligt".

"Hvad som var, det samme skal blive, og hvad som er sket, det samme skal ske; og der er slet intet nyt under Solen".

"Er der noget, om hvilket man kan sige: se, dette er nyt? Det var allerede i de forrige tider, som har været før os".

Tycho Brahe (1573):

Det står nemlig alle filosoffer klart og er også i og for sig indlysende nok, at der i den himmelske verdens ophøjede region ikke sker nogen forandring hverken i retning af opståen eller undergang. Men himlen og de himmellegemer, den rummer, forøges ikke, formindskes ikke, ændres ikke, hverken i tal, størrelse eller lysstyrke, eller på nogen anden måde, men himmellegemerne forbliver stedse uforanderlige, altid i samme skikkelse, idet de ikke angribes af årenes gang. Iagttagelser, gjorte gennem århundreder af alle mestre, viser desuden, at alle stjerner bestandig bevarer samme antal, plads, orden, bevægelse og størrelse, som de også kan ses at bevare efter iagttagelse af dem.

De fleste vestlige filosoffer har ment, at Universet som sådant er uforanderligt; at Universet på en eller anden måde er blevet skabt for derefter stort set ikke at have ændret sig. Denne tankegang blev man som tidligere nævnt i slutningen af 1920'erne nødt til at opgive, da Hubble påviste, at Universet udvider sig.

Denne udvidelse af rummet kan netop forklare de observerede rødforskydninger af galakse/kvasar-spektrene. At rummet udvider sig betyder jo, at *alle* afstande i rummet øges, og dermed øges også bølgelængderne af den stråling, som er på vej fra en galakse til en anden.

Dette er årsagen til, at de observerede galakse/kvasar-spektre altid er netop rødforskudte. I modsætning til blåforskudte, som jo ville svare til en sammentrækning af rummet.



Når elektromagnetisk stråling sendes fra en galakse A til en anden galakse B, strækkes bølgelængden λ i takt med Universets udvidelse.

Der er forskel på doppler-forskydninger og kosmologiske rødforskydninger

Måske er du ikke overbevist om, at der er forskel på kosmologiske rødforskydninger og doppler-forskydninger? Lad os illustrere forskellen med nogle tankeeksperimenter.

Tankeeksperiment 1. To stjerner A og B inden for *samme* galakse er i hvile i forhold til hinanden. I et kort tidsrum afsendes fra A en lysbølge hen mod B. Efter at denne lysbølge har forladt A, og mens den endnu er på vej til B, begynder B at bevæge sig væk fra A. Denne midlertidige flugt tænkes dog at stoppe, inden lysbølgen når hen til B. En iagttager ved B vil således modtage lysbølgen i hvile i forhold til A. I denne situation vil der *ikke* være nogen doppler-forskydning, idet A og B's relative hastighed er nul, såvel ved afsendelsen som ved modtagelsen af lysbølgen. En iagttager ved B vil måle præcis samme bølgelængde som en iagttager ved A. Stjerne B's midlertidige flugt vil blot have den konsekvens, at lysbølgen bliver noget forsinket i at nå frem til B. Doppler-forskydninger forekommer ved bevægelser *gennem* rummet på afsendelses/modtagelses-tidspunktet. Hvordan stjernerne mellem disse to tidspunkter indbyrdes bevæger sig, er ligegyldigt.

Tankeeksperiment 2. Byt nu de to stjerner A og B ud med to galakser, og lad A og B være i hvile i forhold til hinanden i et foreløbigt statisk univers. I et kort tidsrum afsendes fra A en lysbølge hen mod B. Efter at denne lysbølge har forladt A, og mens den endnu er på vej til B, begynder rummet at udvide sig. Denne midlertidige udvidelse tænkes dog at stoppe, inden lysbølgen når helt hen til B. En iagttager i B vil således modtage lysbølgen i hvile i forhold til A. I denne situation vil der *ikke* være nogen doppler-forskydning, idet A og B's relative hastighed er nul, såvel ved afsendelsen som ved modtagelsen af lysbølgen. En iagttager i B vil dog alligevel måle en større bølgelængde end en iagttager i A, idet lysbølgens bølgelængde er forøget i takt med rummets almindelige udvidelse. Hvis man kun accepterede doppler-effekten som årsag til rødforskydninger af spektre, så ville man benægte, at der i dette tilfælde ville forekomme nogen ændring af lysbølgens bølgelængde. Men det vil der !

De kosmologiske rødforskydninger skyldes rummets almindelige udvidelse *mellem* afsendelses- og modtagelsestidspunktet.

2.6 Teleskoper som tidsmaskiner

Den elektromagnetiske stråling, som udsendes fra en galakse, er jo en vis tid om at nå ned til os. Da afstandene er enorme, vil denne forsinkelse blive betydelig (helt op til milliarder af år !).

Strålingen er således også en budbringer om, hvordan verden så ud i en fjern fortid. Når Jordens teleskoper kigger ud i rummet, så ser de tilbage i tiden.

For en given galakse betegner t_e det tidspunkt, hvor den stråling, som vi i dag modtager, blev udsendt. Afstanden til galaksen til udsendelsestidspunktet kaldes r_e .

Med disse betegnelser angiver r_0/r_e den faktor, som Universet har strakt sig, mens strålingen har været undervejs. Eftersom bølgelængden af strålingen strækkes med samme faktor må

$$\frac{r_0}{r_e} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e},$$

hvor λ_e og λ_0 står for henholdsvis den emitterede bølgelængde og den i dag modtagne bølgelængde. Sammenholdes med (2.1) $\lambda_0/\lambda_e = 1 + z$ fås:

$$\frac{r_0}{r_e} = 1 + z \quad (2.4)$$

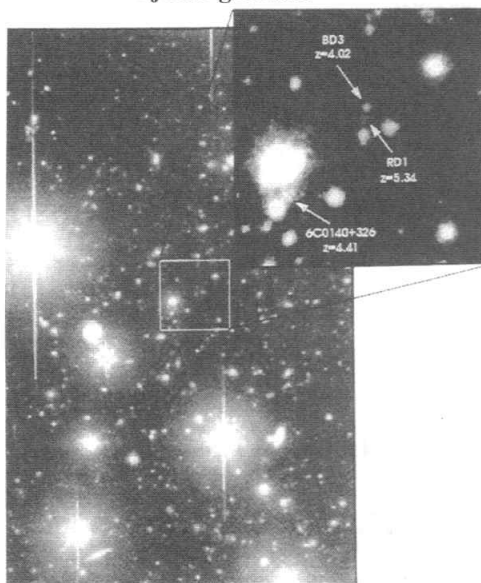
Dette udtryk giver grundlag for følgende fortolkning: *Rødforskydningen z angiver den brøkdel, som rummet har udvidet sig, siden strålingen forlod den pågældende galakse.*

Hvis rødforskydningen i et spektrum fra en galakse måles til fx $z = 0,80$, så har rummet udvidet sig 80 % i det tidsrum, som strålingen har været undervejs.

Ligning (2.4) kan omskrives ved at sætte $t = t_e$ i relationen (1.4) $r(t) = \mathfrak{R}(t) \cdot r_0$:

$$r(t_e) = \mathfrak{R}(t_e) \cdot r_0 \Leftrightarrow \frac{r_e}{r_0} = \mathfrak{R}(t_e) \Leftrightarrow \mathfrak{R}(t_e) = \frac{1}{1 + z} \quad (2.5)$$

Fjerne galakser



Fotoet viser et udsnit af himlen, hvor det er lykkedes at identificere nogle meget fjerne galakser. Galaksen med $z = 5,34$ havde en kort overgang i 1990'erne rødforskydningerekorden.

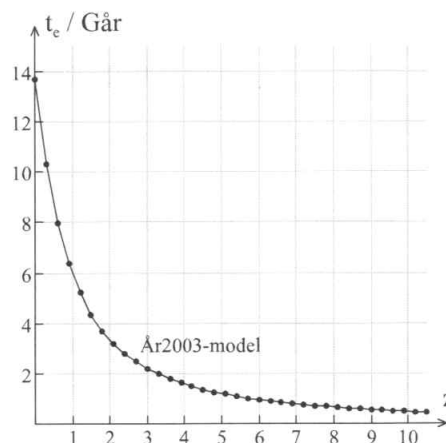
Indsættes skalafaktoren fra År2003-modellen i ligning (2.5) fås:

$\mathfrak{R}(t) = 0,452 \cdot (e^{0,0929t} - e^{-0,0929t})^{2/3} = 1/6,34 \Leftrightarrow t_e = 1,1$ Går.
Den stråling, som vi i dag modtager fra galaksen RD1, blev følgelig udsendt, da Universet var ca. 1,1 mia. år. Eller sagt på en anden måde: Vi "ser" i dag galaksen RD1, som den "så ud" for 13,7-1,1 = 12,6 mia. år siden.

Man regner med at blive ved med at observere galakser ud til $z \approx 10$ -20. Dette svarer til $t_e \approx 0,20$ -0,56 Går. Dannelsen af galakser er således gået i gang forholdsvis tidligt i Universets historie (allerede efter nogle hundrede millioner år).

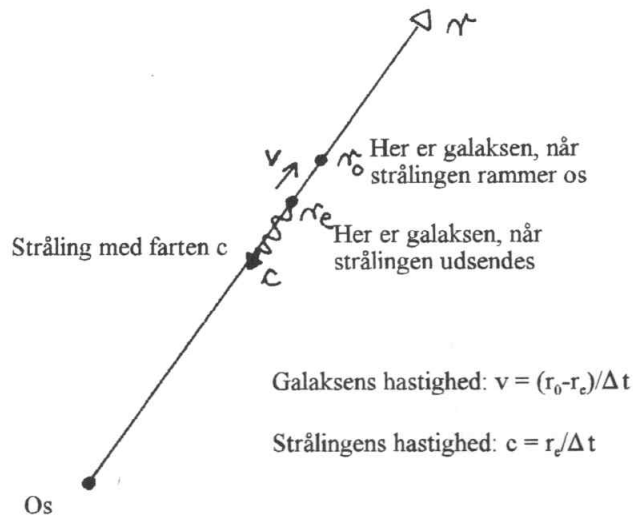
Grafen viser afsendelsestidspunktet t_e som funktion af rødforskydningen z . Sammenhængen mellem disse to størrelser er modelafhængig. I dette tilfælde er År2003-modellen anvendt. Det ses, at grafen, som den skal, starter i 13,7 mia. år, og når ned på nogle hundrede mio. år for $z \approx 10$.

t_e som funktion af z



2.7 Fra rødforskydning z til galakseafstand

Hvis rødforskydningen z for en galakse er lille, det vil sige $|z| \lesssim 0,1$, så er $r_0 \approx r_e$. Dette medfører for det første, at $r_e = c \cdot \Delta t$, hvor Δt angiver det tidsrum, som strålingen er om at nå os. For det andet kan galaksens nuværende hastighed beregnes som $v_0 = (r_0 - r_e)/\Delta t$. Se figuren.



Af (2.4) fås

$$v_0 = \frac{r_0 - r_e}{\Delta t} = \frac{r_0 - r_e}{r_e/c} = c \cdot \frac{r_0 - r_e}{r_e} = c \cdot \left(\frac{r_0}{r_e} - 1 \right) = c \cdot (z + 1 - 1) = c \cdot z.$$

Dette er *tilfældigvis* den samme relation, som Doppler-formlen (2.3). Indsættes udtrykket for v_0 i Hubble-loven $v_0 = H_0 \cdot r_0$ fås:

$$r_0 = \frac{v_0}{H_0} = \frac{c \cdot z}{H_0} = T_H \cdot c \cdot z = L_H \cdot z = 13,8 \text{ Gly} \cdot z.$$

For galakser med $z < 0,1$ gælder følgende

$$v_0 = c \cdot z \quad (2.6)$$

$$r_0 = L_H \cdot z = 13,8 \text{ Gly} \cdot z \quad (2.7)$$

Det er således for *nære* galakser en smal sag ud fra en måling af rødforskydningen z at slutte sig til den pågældende galakses hastighed v_0 og afstand r_0 .

Eksempelvis fås for $z = 0,02$:

$$v_0 = c \cdot 0,02 = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 0,02 = 6,0 \cdot 10^6 \text{ m/s} \quad \text{og} \quad r_0 = 13,8 \text{ Gly} \cdot 0,02 = 0,28 \text{ Gly}.$$

Hvis rødforskydningen z ikke er lille, så gælder (2.6) og (2.7) ikke længere, og "oversættelsen" af en målt rødforskydning z til en afstand r_0 , bliver modelafhængig. Et givet z svarer eksempelvis i Einstein/de Sitter-universet ikke til samme afstand som i År2003-universet.

I kapitel 6 vises i detalje hvordan "oversættelsen" skal foretages, men resultatet får du allerede her. Der gælder nemlig

For alle rødforskydningstal z gælder

$$r_0 = c \cdot \int_{t_e}^{t_0} \frac{1}{\mathfrak{H}(t)} dt \quad (2.8)$$

$$v_0 = H_0 \cdot r_0$$

Du skal ikke fortvivle over integraltegnet i ovenstående formel. Betragt det som en opskrift på, hvordan man udregner afstande. Du får opskriften i nedenstående eksempel.

Eksempel Udregning af afstande

Som et eksempel på en udregning vil vi tænke os, at vi arbejder inden for Einstein/de Sitter-modellen, og at rødforskydningstallet for en bestemt galakse er målt til $z = 4$.

Først anvendes ligning (2.5) $\mathfrak{H}(t_e) = (1+z)^{-1}$ til at bestemme t_e . Dette gøres lettest ved at bruge en solver-funktion: $0,228 \cdot t_e^{2/3} = 1/5 \Leftrightarrow t_e = 0,822$ (Går).

Dernæst udregnes integralet; fx ved hjælp af TI83's *fnInt*-funktion:

```
fnInt(1/(0.228*T
^(2/3)),T,0.822,
9.2)
15.24511308
```

Enheden på de 15,2 er Går (fordi tiden t regnes i Går). For at få afstanden r_0 skal der sluttelig ganges med c . Men det er hurtigt overstået, idet $15,2 \text{ Går} \cdot c = 15,2 \text{ Gly}$. Altså $r_0 = 15,2 \text{ Gly}$.

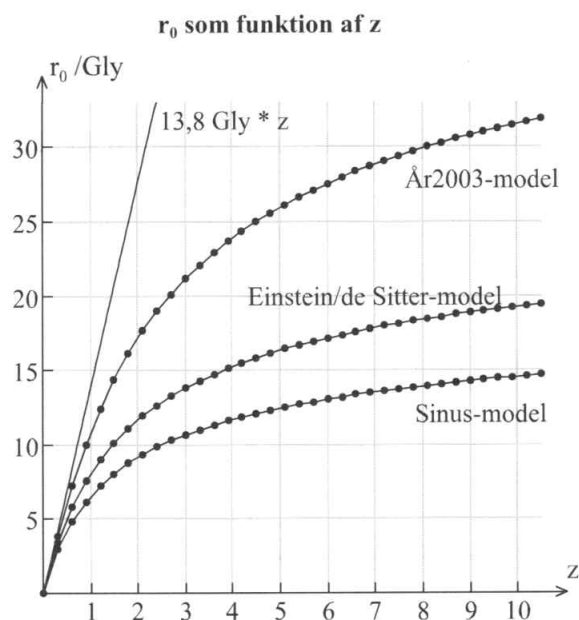
Når man har r_0 , kan r_e let findes af (2.4): $r_e = r_0/(1+z) = 15,2/5 \text{ Gly} = 3,0 \text{ Gly}$.

Ifølge Einstein/de Sitter-modellen var den pågældende galakse følgelig 3,0 Gly væk, da den i dag modtagne stråling blev afsendt. I dag skulle afstanden til galaksen være 15,2 Gly.

Foretages de analoge udregninger i År2003-modellen fås (jvf. Opgave 208):

$t_e = 1,578 \text{ Går}$, $r_0 = 23,9 \text{ Gly}$ og $r_e = 4,8 \text{ Gly}$. Ifølge denne model skulle den pågældende galakse følgelig være 4,8 Gly væk, da den i dag modtagne stråling blev afsendt, og den aktuelle afstand skulle være 23,9 Gly. Det ses, at modelafhængigheden er betydelig. Einstein/de Sitter-afstanden er 36 % for lille i forhold til "den rigtige" (= År2003-afstanden).

Bruges formel (2.7) $r_0 = L_H \cdot z$ fås: $r_0 = 13,8 \text{ Gly} \cdot 4 = 55,2 \text{ Gly}$. Dette er 131 % for stort i forhold til År2003-afstanden.



Grafen viser afstanden r_0 som funktion af z for de tre modeluniverser fra Kapitel 1. Det ses, at alle graferne i starten følger den rette linje bestemt ved $r_0 = L_H \cdot z$. Modelafhængigheden bliver først rigtig tydelig for $z \geq 0,5$.

Eksempel År2003-universet. Partikelhorisont. Overlyshastigheder

Hvis man i udtrykket (2.8) sætter $t_e = 0$ og udregner det tilhørende r_0 ved hjælp af År2003-modellen fås 47,6 Gly. Fortolkningen af denne størrelse er følgende: *Fra områder af Universet, som i dag er mere end 47,6 Gly væk, har der ikke været tid nok til, at nogen form for stråling har kunnet nå frem til os.* Man kalder denne grænse for *partikelhorisonten*. Partikelhorisonten angiver hvor langt ud det *principielt tilgængelige* univers strækker sig.

Det skal bemærkes, at partikelhorisonten er modelafhængig. Mere om partikelhorisonter følger i Kapitel 6.

Den beregnede partikelhorisonten er større end hubblelængden (= 13,8 Gly), så ifølge denne model findes der masser af galakser med flugthastigheder større end lyshastigheden; nemlig alle galakser med $13,8 \text{ Gly} < r_0 < 47,6 \text{ Gly}$. For galakser tæt på partikelhorisonten er flugthastigheden $47,6/13,8 = 3,4$ gange så stor som c .

For at finde ud af, hvilke galakser, der har overlyshastigheder, indsættes $r_0 = 13,8 \text{ Gly}$ i udtrykket (2.8), og den fremkomne ligning løses med hensyn til t_e :

$$\text{fnInt}(1/\mathfrak{R}(t), t, t_e, 13.7) = 13.8 \Leftrightarrow t_e = 4,60 \text{ Går.}$$

(Løser du denne ligning ved hjælp af TI 83-solver, så skal du have tålmodighed, idet det tager adskillige minutter). Den fundne værdi for t_e indsættes så i (2.5):

$$\mathfrak{R}(4,60) = 1/(1+z) \Leftrightarrow z = 1,41.$$

Konklusionen er, at alle de galakser, som observeres, og som har en rødforskydning z , der er større end 1,41, har overlyshastigheder.

Kapitel 3

Ekkoer fra Big Bang

3.1 Sortlegeme-stråling

Som eksempler på en *gas af fotoner* kan nævnes fotonerne i en mikrobølgeovn eller fotonerne i lyset fra en elektrisk pære. Til at beskrive sådanne gasser indføres en størrelse, der kaldes *energitæthedsfordelingen* og betegnes $\Delta\epsilon_\lambda$.

Løst sagt så beskriver $\Delta\epsilon_\lambda$, hvordan energitætheden i strålingen fordeler sig på de forskellige bølgelængder. Helt præcist er betydningen af $\Delta\epsilon_\lambda$ følgende:

Energitæthedsfordelingen $\Delta\epsilon_\lambda$ er energitætheden (= energi pr. volumen) for den del af strålingen, som har bølgelængder i det lille bølgelængde-interval mellem λ og $\lambda + \Delta\lambda$. SI-enheden for $\Delta\epsilon_\lambda$ er J/m³.

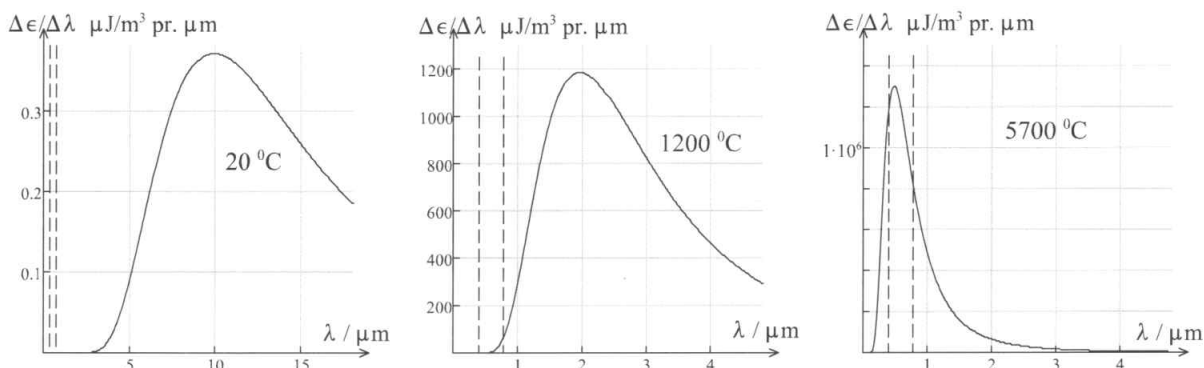
Hvis en gas af fotoner er i termisk ligevægt, kaldes den *sortlegeme-stråling*. For at en fotongas kan være i termisk ligevægt, skal der være stof til stede, således at fotonerne konstant kan blive absorberet og emitteret af atomerne i stoffet. Indbyrdes vekselvirker fotonerne nemlig ikke. Det klassiske eksempel på sortlegeme-stråling er den elektromagnetiske stråling, der er i en lukket keramikovn med mørke vægge. Væggenes temperatur T bestemmer strålingens temperatur i den forstand, at en lille genstand anbragt midt i ovnen på grund af strålingspåvirkningen også opnår temperaturen T . I en mikrobølgeovn er strålingen *ikke* i termisk ligevægt.

I en given sortlegeme-stråling optræder der fotoner med alle mulige bølgelængder λ . Hvordan energitætheden i strålingen fordeler sig på de forskellige bølgelængder er givet ved den såkaldte *Planck-fordeling*:

$$\Delta\epsilon_\lambda = \frac{b}{\lambda^5} \cdot \frac{\Delta\lambda}{e^{a/(T \cdot \lambda)} - 1} \quad (3.1)$$

hvor a og b er naturkonstanter: $a = h \cdot c / k = 1,440 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{m}$ og $b = 8\pi \cdot h \cdot c = 5,00 \cdot 10^{-24} \text{ J} \cdot \text{m}$. Bemærk, at fordelingen $\Delta\epsilon_\lambda$ alene er bestemt af temperaturen T (og ikke også af fx gassens volumen og tryk). Udtrykket (3.1) blev opdaget en søndag aften i oktober 1900 af tyskeren *Max Planck*. Denne begivenhed markerer det afgørende startskud til den moderne fysiks gennembrud. Revolutionen bestod i, at for at beskrive den elektromagnetiske stråling, der udsendes fra et legeme med en bestemt temperatur, er man nødsaget til at opfatte strålingen som bestående af nogle individuelle "energiklumper" (= energikvanter). Disse energiklumper fik senere navnet *fotoner*.

Tre Planck-kurver



På figuren ses Planck-kurverne for tre forskellige temperaturer. Bølgelængdeintervallet angivet ved de to stiplede linjer viser det *synlige område* (0,40-0,78 μm).

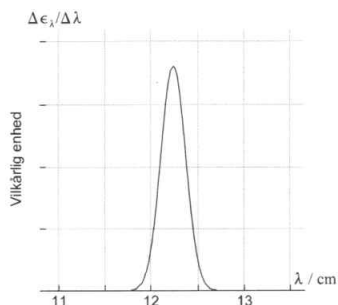
Ved 20 °C udsender et legeme masser af stråling, men strålingen er ikke synlig for vores øjne, idet intensiteten i det synlige område er for lille.

Hvis legemet har temperaturen 1200 °C lyser det rødt, idet strålingsintensiteten i den røde ende af det synlige område er stor nok til, at vores øjne kan registrere den.

Ved temperaturen 5700 °C ses strålingsintensiteten at være nogenlunde jævnt fordelt ud over det synlige område; alle de "synlige bølgelængder" er til stede i strålingen med nogenlunde lige stor styrke. Legemet er hvidglødende.



Albert Einstein modtager Planckmedaljen af Max Planck i 1929



På figuren er vist grafen for $\Delta\epsilon_\lambda/\Delta\lambda$ for fotongasen i en mikrobølgeovn. Det ses, at al strålingen i det væsentlige har samme bølgelængde $\approx 12,2$ cm. Grafen har *ikke* den karakteristiske skæve form, som Planck-kurver besidder. Strålingen i en mikrobølgeovn er *ikke* i termisk ligevægt.

Mere om sortlegeme-stråling

Idet en fotons energi er givet ved $E_\gamma = h \cdot c / \lambda$, må størrelsen $\Delta\epsilon_\lambda / E_\gamma = \Delta\epsilon_\lambda / (hc / \lambda)$ have følgende betydning: $\Delta N_\lambda = \Delta\epsilon_\lambda / (hc) \cdot \lambda$ angiver fotontætheden (= antal fotoner pr. volumen) for den del af strålingen, som har bølgelængder i det lille bølgelængdeinterval mellem λ og $\lambda + \Delta\lambda$. SI-enheden for ΔN_λ er m^{-3} .

$$\Delta N_\lambda = \frac{\Delta\epsilon_\lambda}{h \cdot c / \lambda} = \frac{b}{h \cdot c} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^5} \cdot \frac{\Delta\lambda}{e^{a/(T \cdot \lambda)} - 1} = \frac{8\pi}{\lambda^4} \cdot \frac{\Delta\lambda}{e^{a/(T \cdot \lambda)} - 1} \quad (3.3)$$

Summeres der i dette udtryk over alle bølgelængder, fås den samlede fotontæthed N_{total} (= antal fotoner pr. volumen):

$$N_{\text{total}} = \sum_\lambda \Delta N_\lambda = \frac{60,422}{a^3} \cdot T^3 = (2,0235 \cdot 10^7 m^{-3} \cdot K^{-3}) \cdot T^3 \quad (3.4)$$

På analog måde fås den samlede energitæthed ϵ_{total} (= den samlede fotonenergi pr. volumen):

$$\epsilon_{\text{total}} = \sum_\lambda \Delta\epsilon_\lambda = \frac{6,494 \cdot b}{a^4} \cdot T^4 = \frac{8\pi^5 k^4}{15(hc)^3} \cdot T^4 = (7,551 \cdot 10^{-16} J \cdot m^{-3} \cdot K^{-4}) \cdot T^4 \quad (3.5)$$

Den gennemsnitlige energi af den enkelte foton $\langle E \rangle$ må så være:

$$\langle E \rangle = \frac{\epsilon_{\text{total}}}{N_{\text{total}}} = \frac{0,10748 \cdot b}{a} \cdot T = (3,730 \cdot 10^{-23} J/K) \cdot T = 2,70 \cdot k \cdot T, \quad (3.6)$$

hvor $k = 1,38065 \cdot 10^{-23} J/K$ kaldes Boltzmanns konstant.

Man kan vise, at strålingsfluxen F_{total} (= den strålingsenergi, der pr. sekund strømmer gennem en flade på $1 m^2$) er givet ved Stefan-Boltzmanns lov:

$$F_{\text{total}} = \frac{c}{4} \cdot \epsilon_{\text{total}} = \frac{4,871 \cdot 10^8 m/s \cdot b}{a^4} \cdot T^4 = (5,67 \cdot 10^{-8} W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}) \cdot T^4 = \sigma \cdot T^4, \quad (3.7)$$

hvor $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} W/(m^2 \cdot K^4)$ kaldes Stefan-Boltzmanns konstant.

Efter at denne naturkonstant er indført kan ϵ_{total} i (3.5) også skrives:

$$\epsilon_{\text{total}} = \frac{4 \cdot F_{\text{total}}}{c} = \frac{4 \cdot \sigma \cdot T^4}{c} = \frac{4 \cdot \sigma}{c} \cdot T^4 \quad (3.8)$$

3.2 Sortlegeme-stråling i et ekspanderende univers

Hvad sker der med sortlegeme-stråling i et ekspanderende univers, hvor fotonerne ikke vekselvirker med nogen eller noget? Antag fx at alle afstande i universet fra tiden t til tiden t' fordobles. Under ekspansionen vil alle bølgelængder følgelig også blive fordoblet: $\lambda' = 2 \cdot \lambda$. Til tiden t antages strålingen at være i termisk ligevægt med temperaturen T . Til dette tidspunkt følger energitæthedsfordelingen dermed en Planck-fordeling:

$$\Delta \epsilon_{\lambda}(t) = \frac{b}{\lambda^5} \cdot \frac{\Delta \lambda}{e^{a/(T \cdot \lambda)} - 1}$$

Efter ekspansionen er energitæthedsfordelingen $\Delta \epsilon(t')$ i det nye bølgelængdeinterval fra λ' til $\lambda' + \Delta \lambda'$ mindre end $\Delta \epsilon(t)$ af to forskellige grunde:

- 1) Eftersom universets volumen øges med en faktor $2 \cdot 2 \cdot 2$, og antallet af fotoner er uforandret, vil tætheden af fotoner mindskes med en faktor 8.
- 2) Eftersom energien af den enkelte foton er givet ved $E_{\gamma} = h \cdot c / \lambda$, og bølgelængden bliver en faktor 2 større, vil samtlige fotonenergier mindskes med en faktor 2.

Af dette kan indses, at energitæthedsfordelingen alt i alt mindskes med en faktor $2 \cdot 8 = 16$:

$$\Delta \epsilon_{\lambda}(t') = \frac{\Delta \epsilon_{\lambda}(t)}{16} = \frac{b}{16 \cdot \lambda^5} \cdot \frac{\Delta \lambda}{e^{a/(T \cdot \lambda)} - 1}$$

Udtrykkes dette ved den nye bølgelængde $\lambda' = 2 \cdot \lambda$ fås:

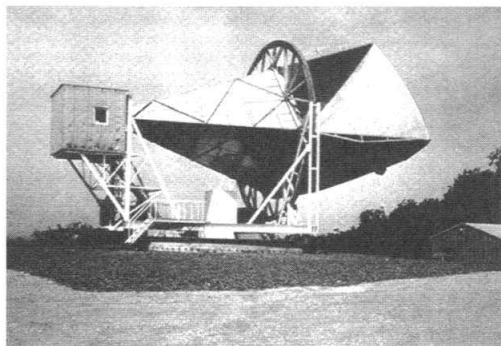
$$\Delta \epsilon_{\lambda'}(t') = \frac{b}{16 \cdot (\lambda'/2)^5} \cdot \frac{(\Delta \lambda')/2}{e^{a/(T \cdot \lambda'/2)} - 1} \Leftrightarrow \Delta \epsilon_{\lambda'}(t') = \frac{b}{(\lambda')^5} \cdot \frac{\Delta \lambda'}{e^{a/(T/2 \cdot \lambda')} - 1}$$

Det sidste udtryk er også en Planck-fordeling (som funktion af den nye bølgelængde λ'); blot er T blevet erstattet med en ny temperatur: $T' = T/2$.

Konklusion

- 1) Den frit ekspanderende fotongas bliver ved med at være beskrevet ved en Planck-fordeling
- 2) Den tilhørende temperatur *mindskes* med ekspansionsfaktoren (her lig med 2)

(3.9)



Bells antenne. New Jersey. USA

Det var med denne antenne (også kaldet *Hornet*), at den kosmiske baggrundsstråling for første gang blev registreret. Det var 1965.

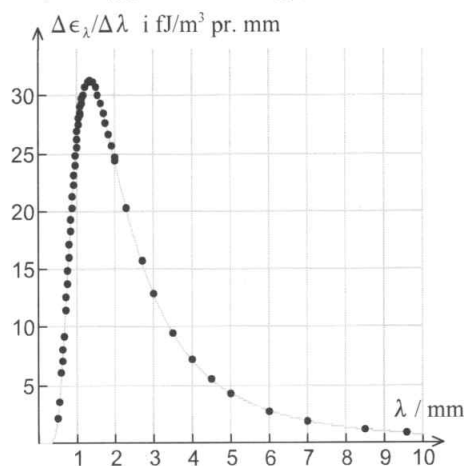
3.3 Den kosmiske baggrundsstråling

På en hitliste over *de gyldne øjeblikke i kosmologiens historie* er de to øverste pladser besat. Den ene plads går til Hubbles opdagelse i 1929 af Universets ekspansion, og den anden plads til opdagelsen i 1965 af "*The Afterglow of Creation*" (eller mere prosaisk udtrykt: af *den kosmiske baggrundsstråling*). Denne sidste opdagelse blev gjort på Bell Telephone Laboratories i New Jersey af to fysikere *Penzias* og *Wilson*, der arbejdede på via mikrobølger at forbedre kommunikationen med satellitter. Et af problemerne var, at modtagerantennen på Jorden tilsyneladende konstant modtog et svagt "støjsignal", som de trods alle mulige anstrengelser ikke kunne finde årsagen til. "Støjen" kom med samme intensitet fra alle retninger, og der var ingen åbenbare forklaringer på, hvorfra strålingen stammede. Hverken fænomener i Jordens atmosfære eller kendte astronomiske strålingskilder kunne forklare det observerede. Til sidst måtte Penzias og Wilson konstatere, at "støjen" var reel nok, og de publicerede deres opdagelse under den noget beskedne titel *A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s*. (Den frekvens f , som deres antenne var stillet ind på, var 4080 MHz. Dette svarer til en bølgelængde på $\lambda = c/f = 7,35$ cm).

Selvom Penzias og Wilson ikke umiddelbart var klare over betydningen af deres egne observationer, så forstod en gruppe teoretiske fysikere på det nærliggende Princeton Universitet straks, hvad det drejede sig om. De forklarede for en måbende omverden i det samme nummer af *Astrophysical Journal*, som "the excess antenna temperature artiklen" blev offentliggjort, hvordan resultatet skulle fortolkes i en større sammenhæng. Denne fortolkning, der efterfølgende er blevet bekræftet med helt usædvanlig eksperimentel nøjagtighed, er i dag et uomtvisteligt faktum, som enhver kosmolog må acceptere. Penzias og Wilson blev i 1978 belønnet med Nobelprisen for *en af 1900-tallets allervigtigste videnskabelige opdagelser*.

Penzias og Wilsons oprindelige måling af den kosmiske baggrundsstråling foregik ved bølgelængden $\lambda = 7,35$ cm. Siden er strålingen målt ved mange andre bølgelængder. I november 1990 målte satellitten COBE højt over Jordens generende atmosfære den kosmiske baggrundsstråling med stor præcision. Resultatet ses nedenfor. Konklusionen er uundgåelig: *Den kosmiske baggrundsstråling følger en Planck-kurve*.

Energitætheden som funktion af bølgelængden for den kosmiske baggrundsstråling (COBE 1990)



Sammen med målepunkterne er indtegnet en Planck-kurve med $T = 2,73$ K

Når man ser COBE-missionens resultater, er det ikke svært at lade sig overbevise om, at vores Univers er fyldt med sortlegeme-stråling med temperaturen $T = 2,73 \text{ K}$. Energitætheden af denne stråling kan udregnes af (3.5): $\epsilon_{\text{kosmisk baggr}} = 7,551 \cdot 10^{-16} \cdot 2,73^4 \text{ J/m}^3 = 4,2 \cdot 10^{-14} \text{ J/m}^3$, hvilket iøvrigt stort set er den samme som den gennemsnitlige energitæthed af lyset fra stjernerne i vores egen galakse.

Universet er følgelig overalt gennemtrængt af en fotongas i termisk ligevægt. Men hvordan kan gassen være i termisk ligevægt, når fotonerne ikke vekselvirker indbyrdes og på grund af rummets lammende tomhed stort set heller ikke vekselvirker med det omgivende stof?

Forklaringen er, at alt det stof, som galakserne i dag er opbygget af, engang var en sammenpresset og varm gas. Den intense elektromagnetiske stråling i denne ildkugle var i termisk ligevægt, eftersom fotonerne på grund af den store stoftæthed uafbrudt stødte ind hovedsageligt elektroner. Efterhånden som ildkuglen udvidede sig, og temperaturen samtidigt faldt, blev stoftætheden på et tidspunkt så lille, at fotonerne derefter ekspanderede frit. Det er disse fotoner, vi i dag registrerer som den kosmiske baggrundsstråling. Denne er følgelig et ekko fra den "eksplosion", som satte Universets ekspansion i gang.

Sammenholdes det sagte med konklusionen (3.9) fås:

Universet er i dag gennemtrængt af en fotongas, hvis energitæthedsfordeling er en Planck-kurve med temperaturen $T_0 = 2,73 \text{ K}$. Forfølges denne fotongas bagud i tiden, vil energitæthedsfordelingen stadig være en Planck-kurve bare med temperaturen T :

$$T(t) = \frac{T_0}{\mathfrak{R}(t)} \quad (3.10)$$

Grunden til, at den i dag observerede energitæthedsfordeling er en Planck-kurve, er, at fotongassen engang har været i termisk ligevægt med det omgivende stof.

Den ovenfor skitserede Big Bang forklaring på den faktisk forekommende planckstråling er lige så simpel, som den er overbevisende. Hvordan ellers forklare, at Universet overalt er fyldt med sortlegeme-stråling, der både er nøjagtig lige stærk fra alle retninger og til alle tider?

Sammenhængen (3.10) $T(t) = T_0/\mathfrak{R}(t)$ gælder ikke kun, mens fotonerne i Universets fotongas bevæger sig frit, men også tidligere mens denne fotongas var i termisk ligevægt med det omgivende stof. Dette kan indses ved at bemærke, at den gennemsnitlige energi (3.6) af en enkelt foton $\langle E \rangle = 2,70 \cdot k \cdot T = h \cdot c / \lambda_g$, hvor λ_g angiver bølgelængden af en (gennemsnitlig) foton. Eftersom λ_g er proportional med skalafaktoren $\mathfrak{R}$, må T følgelig være omvendt proportional med $\mathfrak{R}$.

Når man taler om Universets temperatur, menes altid den her omtalte "foton-temperatur"

3.4 Massetæthed for stof og for stråling

En af de allervigtigste parametre i modeller for Universet er den nuværende massetæthed ρ_0 . Denne størrelse er vanskelig at bestemme med bare nogenlunde nøjagtighed. Det for tiden bedste bud er

$$\rho_0 = 2,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg/m}^3 = 1,56 \text{ u/m}^3 \quad (3.11)$$

En uhørt lille massetæthed. "Gud ødsler virkelig med pladsen".

Betragt et udsnit af Universet (fx indeholdende fire bestemte galaksehobe). Dette udsnit tænkes i dag i en eller anden enhed at have målene $1 \times 1 \times 1$. Udsnittet har til et andet tidspunkt målene $\mathfrak{R}(t) \times \mathfrak{R}(t) \times \mathfrak{R}(t)$, men masseindholdet er uændret, idet det stadig indeholder det stof/stråling, som udgør galaksehobene. Følgelig må massetætheden $\rho(t)$ til tiden t være givet ved

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{\mathfrak{R}(t)^3} = \frac{2,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg/m}^3}{\mathfrak{R}(t)^3} \quad (3.12)$$

Det skal understreges, at ρ og ρ_0 i ovenstående formel henviser til massetætheden af stoffet i Universet. Og med "stof" menes her både *almindeligt stof* og såkaldt *mørkt stof*.

Idet strålingen i Universet besidder energi, bidrager strålingen ifølge Einsteins relation $E = m \cdot c^2$ til den samlede massetæthed:

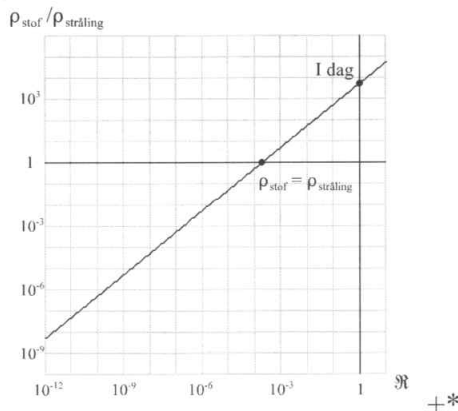
$$\rho_{\text{stråling}} = \frac{\epsilon_{\text{total}}}{c^2} = \frac{4 \cdot \sigma}{c^3} \cdot T^4, \quad (3.13)$$

hvor jeg har brugt (3.8).

Indsættelse af (3.10) samt relevante konstanter giver

$$\rho_{\text{stråling}}(t) = \frac{4\sigma}{c^3} \left(\frac{T_0}{\mathfrak{R}(t)} \right)^4 = \frac{4\sigma T_0^4}{c^3} \cdot \frac{1}{\mathfrak{R}(t)^4} = \frac{4,67 \cdot 10^{-31} \text{ kg/m}^3}{\mathfrak{R}(t)^4} \quad (3.14)$$

Forholdet $\rho_{\text{stof}}/\rho_{\text{stråling}}$ som funktion af $\mathfrak{R}$



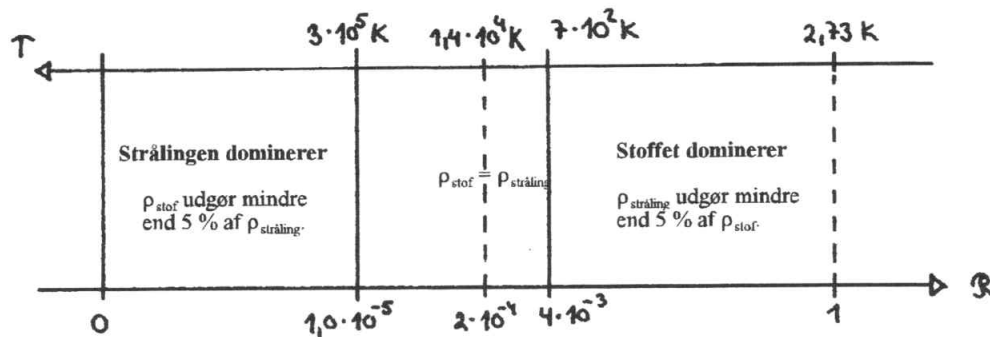
Eftersom

$$\rho_{\text{stof}}/\rho_{\text{stråling}} = \frac{2,6 \cdot 10^{-27} / \mathfrak{R}^3}{4,67 \cdot 10^{-31} / \mathfrak{R}^4} = 5,6 \cdot 10^3 \cdot \mathfrak{R},$$

så vokser det betragtede forhold lineært med $\mathfrak{R}$.

Jo større $\mathfrak{R}$ er, jo større er ρ_{stof} i forhold til $\rho_{\text{stråling}}$. I dag hvor $\mathfrak{R} = 1$ er $\rho_{\text{stof}}/\rho_{\text{stråling}} = 5,6 \cdot 10^3$.

Stof- eller strålingsdomineret univers ?



For $R = 2,0 \cdot 10^{-4}$ er stofmasstætheden og strålingsmasstætheden lige store.

For $R \lesssim 1,0 \cdot 10^{-5}$ dominerer strålingen helt, og for $R \gtrsim 4 \cdot 10^{-3}$ dominerer stoffet helt.

I dag udgør $\rho_{\text{stråling}}$ kun en ganske forsvindende del af ρ_{stof} : $\rho_{\text{stråling}}/\rho_{\text{stof}} = 1/(5,6 \cdot 10^3) = 0,02 \%$. Vores nuværende univers er følgelig i en tilstand, hvor stoffet energimæssigt fuldstændigt dominerer over strålingen.

3.5 Mørkt stof

Alt almindeligt stof er jo opbygget af protoner, neutroner og elektroner. Disse partikler er skabt i de allertidligste faser af Universets levetid, og det skabte antal gør udmærket rede for den "synlige" masse i galakser og i rummet mellem galakserne (enkeltstjerner, gasser, støv, ...). Den tilsvarende masstæthed vurderes i dag til

$$\rho_{\text{almindeligt stof}} = 0,42 \cdot 10^{-27} \text{ kg/m}^3 = 0,25 \text{ u/m}^3 \quad (3.15)$$

I Universet er der således i gennemsnit kun 0,25 nukleoner pr. m^3

Det er et eksperimentelt faktum, at $\rho_{\text{almindeligt stof}}$ er markant mindre end masstætheden ρ_0 (3.11). Denne sidste er bestemt ud fra den masse, som er nødvendig for at forklare de observerede gravitationelle tiltrækkende kræfter både indenfor den enkelte galakse og galakserne imellem. Der må følgelig eksistere en anden form for stof, som *ikke* består af protoner, neutroner og elektroner. Dette stof kaldes *mørkt stof* (= *dark matter*). Navnet hentyder til, at det ikke er direkte "synligt", men kun indirekte afslører sin eksistens gennem dets gravitationskræfter på "synligt" stof.

Ved indsættelse fås: $\rho_{\text{almindeligt stof}}/\rho_0 = 0,25/1,56 = 0,16$. Det almindelige stof udgør således kun 16 % af Universets samlede stofmængde, mens det mørke stof udgør de resterende 84 %. Det er endnu en stærkt omdiskuteret sag, hvad det mørke stof egentlig er. Ja; mange kosmologer vil ligefrem sige, at vi ikke for nærværende aner, hvad mørkt stof er.

På trods af, at strålingen i dag kun udgør en meget lille del af den samlede massetæthed, så overtrumfer *antallet* af fotoner langt antallet af nukleoner. Fra (3.4) fås nemlig

$$N_{\text{fotoner}} / N_{\text{nukleoner}} = \frac{2,0235 \cdot 10^7 \cdot (2,73)^3}{0,25} = 1,65 \cdot 10^9$$

I Universt i dag er der således alene fra den kosmiske baggrundsstråling ca. 1,65 mia. fotoner for hver nukleon

3.6 Fotonafkoblingen

Som tidligere omtalt, skal der være noget stof til stede, som fotonerne i en fotongas kan vekselvirke med, for at der kan indstille sig en termisk strålingsligevægt. I denne sammenhæng er det hovedsageligt frie elektroner i stoffet, som fotonerne udveksler energi med. I det store billede er disse elektroner i dag ikke længere til fotonernes disposition, idet de er bundet til atomkerner og danner atomer. Men følger vi Universets historie bagud i tiden, hvor $\mathfrak{R}(t)$ bliver mindre og mindre, og temperaturen $T(t)$ derfor bliver større og større (jvf. (3.10)), vil der komme et tidspunkt, hvor atomernes termiske bevægelser er så livlige, at de indbyrdes sammenstød mellem hydrogenatomerne er så voldsomme, at elektronerne kan rives helt væk fra deres atomkerner (og atomerne dermed ioniseres). Det kan ud fra velkendte fysiske lovmæssigheder vises, at temperaturen skal op på ca. 3000 K, før atomerne i en hydrogengas på grund af de termiske bevægelser bliver ioniserede.

Dette må betyde følgende: Så længe temperaturen i Universet er over 3000 K, vil der være masser af frie elektroner til at vekselvirke med fotonerne, således at disse kan komme i termisk ligevægt med det tilstedeværende stof. I det øjeblik Universets temperatur falder ned under 3000 K, vil elektronerne så at sige blive "klistret sammen med protonerne", og derved danne hydrogenatomer. Fotonerne mister forbindelsen med stoffet, og de vil herefter bevæge sig frit. Denne begivenhed i Universets historie, hvor strålingen afkobles fra stoffet, kaldes for *Fotonafkoblingen*. Undertiden anvendes også betegnelsen *Rekombinationen*.

Ved hjælp af (3.10) kan størrelsen af skalafaktoren $\mathfrak{R}_{\text{Afkobl}}$ ved Fotonafkoblingen beregnes:

$$T(t) = \frac{T_0}{\mathfrak{R}(t)} \Leftrightarrow 3000 \text{ K} = \frac{2,73 \text{ K}}{\mathfrak{R}_{\text{Afkobl}}} \Leftrightarrow \mathfrak{R}_{\text{Afkobl}} = 9,1 \cdot 10^{-4} \quad (3.16)$$

Dette betyder, at alle lineære afstande i Universet ved Fotonafkoblingen var faktoren $9,1 \cdot 10^{-4}$ mindre end i dag. Stoftætheden i Universet var da:

$$\rho_{\text{Afkobl}} = \frac{\rho_0}{(\mathfrak{R}_{\text{Afkobl}})^3} = \frac{2,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg/m}^3}{(9,1 \cdot 10^{-4})^3} = 3,5 \cdot 10^{-18} \text{ kg/m}^3.$$

Selvom denne stoftæthed er ca. en milliard gange større end den nuværende stoftæthed, så er det målt med nutidens laboratoriestandarder stadig en ekstremt lille stoftæthed, idet det er

langt, langt mindre end stoftætheden i selv det bedste "vacuum", som det i dag er muligt at frembringe i laboratoriet.

Indsættes $\mathfrak{R}_{\text{Afkobl}}$ i (3.14) fås $\rho_{\text{stråling}} = 6,8 \cdot 10^{-19} \text{ kg/m}^3$. Ved *Fotonafkoblingen* udgjorde $\rho_{\text{stråling}}$ følgelig en ikke ubetydelig del af ρ_{stof} ; nemlig $6,8 \cdot 10^{-19} / 3,5 \cdot 10^{-18} = 19 \%$.

Af (2.5) kan rødforskydningsstallet for fotonerne fra foton-afkoblingen findes:

$$\mathfrak{R}(t_e) = \frac{1}{1+z} \Leftrightarrow 1+z = \frac{1}{\mathfrak{R}(t_e)} \Leftrightarrow z = \frac{1}{9,1 \cdot 10^{-4}} - 1 = 1098$$

Dette kan sammenholdes med, at rødforskydningsrekorden for fjerne objekter som eksempelvis kvasarer endnu ikke er nået op på 8.

Tidspunktet for Fotonafkoblingen er 308 tusinde år efter Big Bang, og den nuværende afstand ud til *the surface of last scattering* er ca. 46 Gly. Selvom kosmologer i dag ikke kan se galakser og kvasarer helt ud til denne grænse, så er de ikke så langt fra, idet der er observeret kvasarer, som i dag befinder sig i så store afstande som ~ 30 Gly. Det skal dog bemærkes, at den kosmiske baggrundsstråling jo netop stammer fra *the surface of last scattering*, så via denne budbringer kan Universet alligevel observeres, som det så ud i en alder af blot 308 tusinde år. Sættes denne alder i forhold til Universets nuværende levetid og sammenlignes med et menneskeliv (~ 80 år), så svarer det til at observere et menneske i det første døgn efter fødslen. *The surface of last scattering* udgør i rummet en kugleskal med radius ~ 46 Gly. Idet vi fokuserer på os selv som iagttagere, er det os, der er i centrum i denne tænkte kugleskal. Det er lidt mærkeligt at tænke på, at på trods af at denne kugleskal nu ses langt ude i de allerfjerneste afkroge af Universet, så var *alle* objekterne på og bag kugleskallen før Fotonafkoblingen forholdsvis tæt på hinanden !

Nogle af de fotoner, som vi i dag modtager på Jorden, er oprindeligt udsendt fra objekter bag *the surface of last scattering*, men disse fotoner har inden Fotonafkoblingen fulgt komplicerede zig-zag baner på grund af de ustandselige sammenstød med elektroner. Dette betyder, at ethvert spor af, hvor en bestemt foton oprindeligt kommer fra, bliver udslettet. Bag *the surface of last scattering* er Universet følgelig ugenomsigtigt. Dette udelukker desværre muligheden for *direkte* at kunne observere Universet, som det så ud i sin allertidligste historie.

3.7 Lepton-epoken

Som vi har set, så er Universets temperatur ved Fotonafkoblingen 3000 K. Eksempelvis er dette kun ca. halvdelen af temperaturen på Solens overflade, og de fysiske love til at beskrive fænomener ved sådanne temperaturer er forholdsvis velkendte. Forfølger vi nu Universets historie længere og længere tilbage i tiden, vil temperaturen stige og stige. I denne fremstilling vil vi "kun" gå tilbage til det tidspunkt, hvor temperaturen er $\approx 10^{11}$ K. Det viser sig, at dette svarer til, at der er gået $\approx 0,02$ sekunder efter selve det store brag. Universets historie herfra og fremefter er i dag så underbygget både eksperimentelt og teoretisk, at kosmologer nu ligefrem taler om en *standardteori*.

Ved temperaturen $\approx 10^{11}$ K er Universet simplere og lettere at beskrive end nogensinde før og for den sags skyld også efter. Universet bestod af elementarpartikler, der bevægede sig frit

rundt mellem hinanden uden at danne større klumper eller overordnede strukturer.

Universets bestanddele ved $T \approx 10^{11}$ K			
Fotoner	γ		
Elektroner	e^-	Positroner	e^+
Neutrinoer	ν	Antineutrinoer	$\bar{\nu}$
Protoner	p	Neutroner	n

Alle disse partikler er i termisk ligevægt; det vil sige, at de uafbrudt støder ind i hinanden. De sørger hele tiden for, at eventuelle forskelle i kinetisk energi hurtigt bliver udjævnet. På dette tidspunkt er Universet en homogen "støvsky" af elementarpartikler. En støvsky helt uden indre strukturer. Der er ca. lige mange fotoner, $e^- e^+$ -par og $\nu \bar{\nu}$ -par. I forhold hertil er antallet af protoner og neutroner forsvindende lille: omkring en milliard gange mindre (akkurat lige som i dag).

Ordet *lepton* bruges som en fællesbetegnelse for blandt andet e^- , e^+ , ν , $\bar{\nu}$, og der var åbenbart på det betragtede tidspunkt et overvældende antal leptoner til stede i hvert fald i forhold til i dag. Denne periode i Universets udvikling kaldes derfor for *lepton-epoken*.

Universets massetæthed i denne udviklingsfase var ca. $3,8 \cdot 10^{12}$ kg/m³. Dette er 3,8 milliarder gange større end vands massefylde, og det er denne ekstreme tæthed sammen med den høje temperatur, som sikrer, at også de ellers så reaktionsvrangvillige neutrinoer og antineutrinoer via sammenstød forbliver i termisk ligevægt med de øvrige partikler.

Bortset fra elastiske sammenstød, så vekselvirker elementarpartiklerne ved nedenstående procestyper:

1. *Skabelse af et elektron/positron-par:* $\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$
De enkelte fotoner er så energirige, at der er rigelig med energi til, at der kan skabes masse svarende til et elektron/positron-par.
2. *Annihilation af et elektron/positron-par:* $e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$
Eftersom positronen er elektronens antipartikel, så vil e^- og e^+ , når de mødes, tilintetgøre hinanden. Den energi, som deres masser repræsenterer, vil dukke op i form af to fotoner. Ved temperaturen $\approx 10^{11}$ K foregår processerne $\gamma\gamma \rightarrow e^- e^+$ og den omvendte $e^- e^+ \rightarrow \gamma\gamma$ lige villigt. Det er grunden til, at antallet af fotoner og antallet af $e^- e^+$ -par er ens.
3. *Vekselvirkninger mellem $e^- e^+$ og $\nu \bar{\nu}$:* $e^+ + e^- \rightarrow \nu + \bar{\nu}$ og $\nu + \bar{\nu} \rightarrow e^+ + e^-$
Ved temperaturen $\approx 10^{11}$ K foregår disse to processer nogenlunde lige villigt, og dette sikrer, at antallet af elektroner (positroner) og antallet af neutrinoer (antineutrinoer) er ens.
4. *Omdannelse af en neutron til en proton:* $e^+ + n \rightarrow p + \bar{\nu}$ eller $\nu + n \rightarrow p + e^-$
5. *Omdannelse af en proton til en neutron:* $e^- + p \rightarrow n + \nu$ eller $\bar{\nu} + p \rightarrow n + e^+$

Efterhånden som Universet udvider sig, falder både temperaturen og massetætheden. Når $T \approx 10^{10}$ K (svarende til $t \approx 2$ sekunder) er tætheden faldet så meget, at neutrinoerne og antineutrinoerne ikke længere tit nok vekselvirker med de øvrige partikler til, at de kan opretholde den termiske ligevægt. Der sker her noget, som helt svarer til den senere foton-afkobling:

*Neutrinoerne og antineutrinoerne afkobles
fra stoffet, og vil derefter bevæge sig frit*

Ved $T \approx 5 \cdot 10^9$ K (svarende til $t \approx 4$ sekunder) ender lepton-epoken ved, at fotonerne ikke mere har energi nok til at skabe $e^- e^+$ -par, og da elektronerne og positronerne jo stadig annihilerer, vil disse partikler i det store og hele forsvinde. Ved annihilationsprocesserne vil der blive frigjort en del energi, som vil blive fordelt mellem de partikler, som endnu er i termisk ligevægt. Eftersom neutrinoerne og antineutrinoerne på dette tidspunkt jo er koblet fra, så får de ikke (i modsætning til fx fotonerne) del i denne energiindsprøjtning. Dette er grunden til, at den "neutrino-baggrundsstråling" som det beskrevne scenario forudsiger overalt vil gennemtrænge vores nuværende Univers, må forventes at have en lavere temperatur end fotonernes 2,73 K. Forholdsvis enkle argumenter fastslår, at neutrinotemperaturen må være $(4/11)^{1/3} \cdot T_0 = 1,95$ K. Dette er en ret så bemærkelsesværdig og præcis forudsigelse:

Universet er i dag fyldt med neutrinoer og antineutrinoer med en energifordeling, der svarer til en temperatur på 1,95 K

Her haves følgelig et ekko fra Big Bang helt tilbage fra de første sekunder af Universets eksistens !

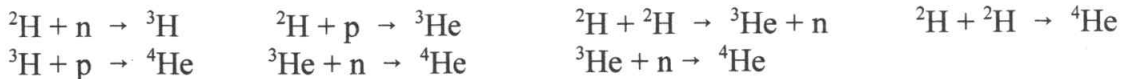
Desværre har ingen indtil nu været i stand til at angive en brugbar metode til at detektere disse meget energifattige neutrinoer og antineutrinoer, så rent faktisk har ingen endnu hørt dette ekko. Er det der, eller er det der ikke ?

Hvis/når ekkoet engang bliver registreret, så vil det være en kæmpe triumf for Big-Bang teorien. Omvendt vil det være et voldsomt tilbageslag, hvis det konstateres, at (anti)neutrinoerne ikke er der, eller hvis de ikke har en veldefineret temperatur, eller hvis en sådan temperatur eksempelvis er større end 2,73 K. Afklaringen af disse forhold er en af dette århundredets store videnskabelige udfordringer.

3.8 Kernesyntesen

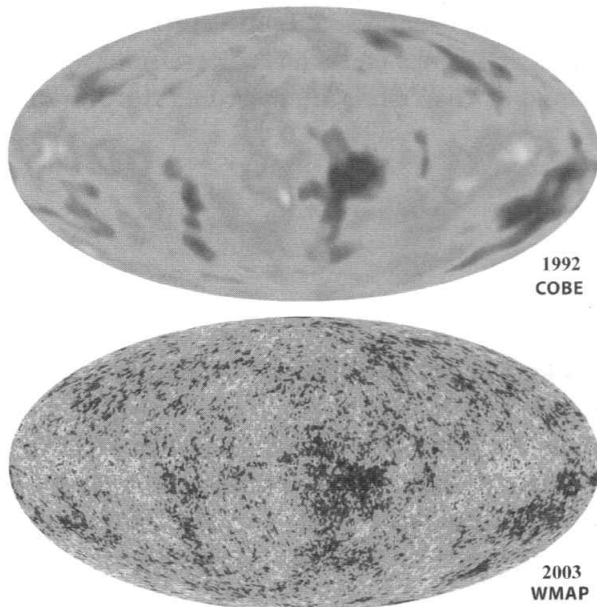
Efterhånden som temperaturen falder i lepton-epoken, er det ikke kun processen $\gamma \rightarrow e^- e^+$, som bliver sjældnere og sjældnere. Det gør processerne $e^- p \rightarrow n \nu$ og $\bar{\nu} p \rightarrow n e^+$ også (i forhold til $e^+ n \rightarrow p \bar{\nu}$ og $\nu n \rightarrow p e^-$). Fordi massen af en neutron er større end massen af en proton, så er sandsynligheden for, at de to førstnævnte processer foregår, mindre end sandsynligheden for de to sidste. Denne forskel er ikke mærkbar, så længe de indkommende partikler har store kinetiske energier, men ved faldende termiske energier giver forskellen sig udslag i, at antallet af neutroner falder i forhold til antallet af protoner. (Processerne, der forvandler protoner til neutroner, kan slet ikke foregå, hvis de indkommende elektroner eller antineutrinoer ikke har tilstrækkelig kinetisk energi). Ved kernefysiske beregninger kan det med stor overbevisning beregnes, at når $T \approx 10^9$ K så er nukleonfordelingen ≈ 12 % neutroner og ≈ 88 % protoner. Temperaturen $T \approx 10^9$ K er her fremhævet, fordi der ved netop denne temperatur (svarende til $t \approx 4$ minutter) sker noget andet afgørende. Under temperaturen $\approx 10^9$ K er de termiske energier nemlig ikke længere store nok til straks at splitte en deuteriumkerne, lige så snart den er dannet ved, at en proton og en neutron klister sig sammen. Der kan følgelig nu ud fra p og n opbygges deuterium, ${}^2\text{H}$: $n + p \rightarrow {}^2\text{H}$.

Dette følges umiddelbart op med opbygning af endnu tungere atomkerner (${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$):

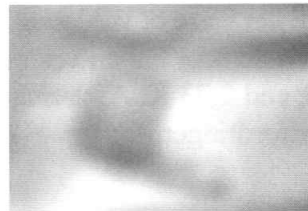


Det grove billede er, at lige så snart temperaturen er blevet lav nok til, at der kan dannes deuterium, så støvsuger protonerne Universet for neutroner. Neutronerne er herefter bundet i ${}^4\text{He}$. Pr. 100 nukleoner er de 12 neutroner, så ud af 100 nukleoner kan der dannes 6 stk. ${}^4\text{He}$ -kerner. Hertil kræves kun 12 protoner, så der er $88-12 = 76$ ledige protoner. *Massemæssigt* svarer dette til, at de tiloversblevne protoner udgør 76 %, og helium de resterende 24 %. Her er vi fremme ved endnu en bemærkelsesværdig og præcis forudsigelse: *Urstoffet, som stjerner og galakser er dannet af, består af ca. 76% hydrogen og ca. 24% helium.* Dette grundstofsforhold var flere år inden Big Bang teorien blev rigtig synlig forholdsvis elementær viden for astronomer, der beskæftigede sig med dannelsen af stjerner og galakser. Den skitserede forklaring er en af Big Bang teoriens største triumfer. Den overalt i Universet observerede massefordeling: ≈ 76 % hydrogen og ≈ 24 % helium, er således endnu et ekko fra Big Bang; i dette tilfælde tilbage fra de første minutter af Universets eksistens.

Den kosmiske baggrundsstrålings temperaturvariation hen over himmelkuglen



Den kosmiske baggrundsstråling giver et øjeblikbillede af Universet, da det var baby



Fotos: NASA/WMAP Science

Team

I 1992 lykkedes det for NASA's COBE-mission at afsløre små temperaturforskelle hen over himmelkuglen i den observerede kosmiske baggrundsstråling. På figuren er disse temperaturforskelle vist ved forskellige farver (jo lysere farve, jo højere temperatur). Med WMAP-missionen i 2003 forbedredes nøjagtigheden svarende til, at babyens armbånd nu kunne læses. Farvenuancerne på WMAP-billedet svarer til temperaturforskelle af størrelsen milliontedele af en grad.

Temperaturvariationerne i Universets fotongas i Universets tidlige barndom ($\sim 308\,000$ år) er direkte koblet til energitætheden af fotonerne ($\epsilon_{\text{total}} \propto T^4$), og denne energitæthed menes at være koblet til tætheden af stof. Følgelig afspejler de observerede temperaturforskelle små variationer i stoftætheden, som de så ud kort efter Big Bang. Udfordringen ligger så i, at forbinde disse vekslende stoftætheder med skabelsen af galakser og Universets senere udviklede storskala-strukturer.

Oversigt over vigtige begivenheder i Universets historie

Tid	Temperatur	Begivenhed
0	Uendelig	Big Bang
0,02 s	$1,0 \cdot 10^{11}$ K	Universet består af partiklerne $\gamma e^+ e^- \bar{\nu} \nu n p$ i termisk ligevægt
2 s	$1,0 \cdot 10^{10}$ K	Neutrinoerne og antineutrinoerne afkobles fra de øvrige partikler
9 s	$5 \cdot 10^9$ K	Stort set alle elektroner og positroner forsvinder (annihilerer)
4 min.	$1,0 \cdot 10^9$ K	Kernesyntesen. Der dannes lette atomkerner: $^2\text{H}, ^3\text{H}, ^3\text{He}, ^4\text{He}$
10^2 år	$3 \cdot 10^5$ K	Herefter dominerer strålingen ikke længere fuldstændigt over stoffet
$3,8 \cdot 10^5$ år	$3,0 \cdot 10^3$ K	Foton-afkoblingen. Universet bliver gennemsigtigt
$4 \cdot 10^6$ år	$7 \cdot 10^2$ K	Herefter dominerer stoffet fuldstændigt over strålingen
–	–	Stjerne- og galaksedannelse
9,1 mia. år	3,9 K	Vores solsystem Solen, Jorden og planeterne dannes
13,2 mia. år	2,8 K	Opståen og udvikling af liv
13,7 mia. år	2,73 K	I dag. Du lever, og du tænker over Universets gåder

I skemaet er tiderne svarende til de opgivne temperaturer i det strålingsdominerede univers beregnet af (4.14). Tiderne i det stofdominerede univers er beregnet ved hjælp af (5.6). (Se Kapitel 4 og 5).

Kapitel 4

Universet underlagt fysikkens love

4.1 Det teoretiske fundament

Stof- og energiindholdet i Universet optræder hovedsageligt i mere eller mindre adskilte "klumper" (planeter, stjerner, galakser, ...). Over tilpas store afstande synes stof- og energiindholdet dog at være nogenlunde jævnt fordelt, og det er på denne skala, at den kosmologiske beskrivelse sætter ind. Med kosmologiske briller kan man ikke se de enkelte stjerner. Det er snarere galakserne/galaksehobene, der for en kosmolog anses for de mindste byggesten. På grund af dette må gravitationskræfter formodes at spille en meget fremtrædende rolle i kosmologien.



Det til dato bedste bud på en teoridannelse til en beskrivelse af gravitation er *Albert Einsteins generelle relativitetsteori* fra 1915. I denne er udviklet en teoretisk begrebsramme til at beskrive gravitationskræfter samt deres indvirkning på tid og rum. Man må nok sige, at teorien er svært tilgængelig. Dette skyldes både de matematiske værktøjer, som teorien gør brug af, samt selve teoriens grundidéer/begreber. Til illustration af dette kan nævnes, at da en af datidens mest fremtrædende astronomer englænderen *Arthur Eddington* i 1920 som den første udgav en decideret lærebog om den generelle relativitetsteori, blev han spurgt af en journalist: "Er det rigtigt, som man siger, at der kun er to personer i verden, som forstår Einsteins nye teori"? Hertil svarede Eddington: "Hvem skulle den anden være"?

Den generelle relativitetsteori er oprindeligt ikke primært skabt til at beskrive Universet som helhed. Alligevel har vist sig at være en glimrende begrebsramme til formålet, idet ingen eksperimentelle data her næsten 100 år efter teoriens fødsel har kunnet røkke ved fundamentet i Einsteins imponerende mesterværk.

I denne fremstilling vil vi ikke gå den lange, møjsommelige vej først at forstå den generelle relativitetsteori, og så anvende denne viden på Universet som helhed. Der er heldigvis en smutvej. Det er nemlig så heldigt, at nogle af Einsteins hovedresultater kan fremtrylles på anden vis. Man skal bare ufortrødent regne newtonske.

Selvom vi ved, at Newtons gravitations-teori og hans opfattelse af rum og tid ikke er en tilfredsstillende beskrivelse af verdensrummet, så kan man alligevel ad den vej fremtrylle eksempelvis den såkaldte *Friedmann-ligning*. Fremgangsmåden retfærdiggøres af, at slutresultatet er det samme som den generelle relativitetsteori, selvom den benyttede teoretiske bevismetode kan kritiseres.

Friedmann-ligningen er en bestemt matematisk relation, som fortæller, hvordan skala-faktoren $\mathfrak{R}$ teoretisk set kan afhænge af tiden. Friedmann-ligningen afslører følgelig Universets overordnede dynamik.



Isaac Newton (1643-1727). Hans mesterværk *Principia Mathematica*, hvis 300 års fødselsdag blev fejret over hele jorden i 1987, omtales ofte som det mest betydningsfulde videnskabelige enkeltarbejde nogensinde.

Det skal bemærkes, at vores Friedmann-ligninger refererer til et såkaldt *støv-univers*. Med dette menes, at der i det homogene medium, som indholdet i Universet beskrives ved, ikke er noget tryk. I det følgende vil støvuniverser også omtales som *Friedmann-universer*.

Den generelle relativitetsteori giver mulighed andre universstyper end støvuniverser, men dette vil vi ikke her forfølge yderligere. Til en nøjere beskrivelse af et *tidligt* Big Bang univers, hvor tætheden er meget stor, kan man ikke med rimelighed se bort fra trykket, og ved beskrivelsen af en sådan udviklingsfase, er støvunivers-modellen ikke brugbar.

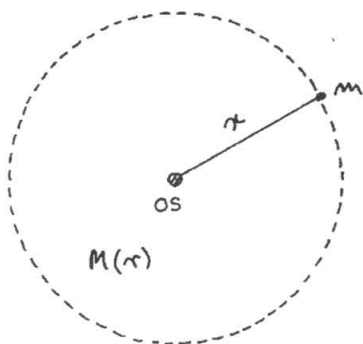
4.2 Friedmannligningen

Ifølge Newton er massetiltrækningskraften (= *gravitationskraften*) F_G mellem to masser m og M givet ved

$$F_G = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2},$$

hvor r står for afstanden mellem masserne m og M . G er en naturkonstant, der kaldes *gravitationskonstanten*. $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$. Minusset i formelen viser, at den pågældende kraft er tiltrækkende.

En galakse i afstanden r



Figuren viser et udsnit af Universet; nemlig en kugle med os selv i centrum og med radius r .

$M(r)$ angiver den samlede masse af de galakser, der befinder sig inden for afstanden r . Betegnes massetætheden med ρ fås:

$$M(r) = V \cdot \rho = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho.$$

Betragt nu en galakse med massen m i afstanden r fra os. Denne galakse er påvirket af gravitationskræfter fra hver af de omliggende galakser. Hvis rummet er *homogent* (det vil sige, at massetætheden ρ er ens i alle punkter), så kan man vise, at den *samlede* gravitationskraft på galaksen er den samme som gravitationskraften fra en enkelt partikel med massen $M(r)$ placeret i centrum. Følgelig fås:

$$F_G = - G \cdot \frac{m \cdot 4/3 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho}{r^2} = - m \cdot 4/3 \cdot \pi \cdot G \cdot r \cdot \rho .$$

I almindelighed anses gravitationskræfterne for at være de helt dominerende kræfter, der virker mellem galakserne. Men undertiden inddrages en anden kraft, der første gang blev introduceret af Einstein i 1917:

$$F_\Lambda = + m/3 \cdot \Lambda \cdot r$$

Naturkonstanten Λ kaldes den *kosmologiske konstant*. Specielt skal det understreges, at Λ ikke afhænger af tiden t . Værdien af Λ er omstridt. Teoretisk set kan Λ tænkes at være såvel positiv, negativ som nul.

$\Lambda > 0$	F_Λ er en <i>frastødende</i> kraft
$\Lambda < 0$	F_Λ er en <i>tiltrækkende</i> kraft
$\Lambda = 0$	F_Λ er nul

Den *resulterende* kraft på en galakse i afstanden r kan nu skrives

$$F_{\text{res}} = F_G + F_\Lambda = - m \cdot 4/3 \cdot \pi \cdot G \cdot r \cdot \rho + m/3 \cdot \Lambda \cdot r .$$

Ved hjælp af Newtons anden lov ($F_{\text{res}} = m \cdot a$) fås

$$m \cdot r''(t) = - m \cdot 4/3 \cdot \pi \cdot G \cdot r \cdot \rho + m/3 \cdot \Lambda \cdot r \Leftrightarrow r''(t) = - 4/3 \cdot \pi \cdot G \cdot r \cdot \rho + \Lambda/3 \cdot r .$$

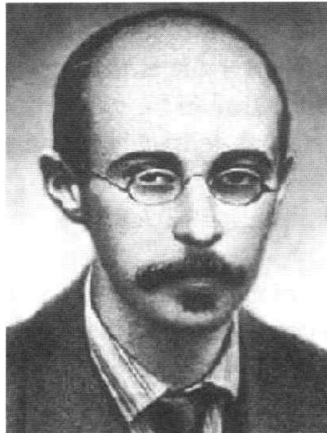
Heri indsættes $r(t) = \mathfrak{R}(t) \cdot r_0$ og $r''(t) = \mathfrak{R}''(t) \cdot r_0$:

$$\mathfrak{R}''(t) \cdot r_0 = - 4/3 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho \cdot \mathfrak{R}(t) \cdot r_0 + \Lambda/3 \cdot \mathfrak{R}(t) \cdot r_0 \Leftrightarrow$$

$$\mathfrak{R}''(t) = - 4/3 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho \cdot \mathfrak{R}(t) + \Lambda/3 \cdot \mathfrak{R}(t) \quad (4.1)$$

Dette er den såkaldte *Friedmann-ligning*. Ligningen er opkaldt efter russeren *Alexander Friedmann*, der i 1922 som den første udledte dette udtryk ud fra den generelle relativitetsteoris grundsætninger.

Indsættes udtrykket (3.12) $\rho = \rho_0/\mathfrak{R}^3$ fås en anden version af Friedmann-ligningen:



Alexander Friedmann (1888-1925)

$$\mathfrak{R}'' = -\frac{4\pi G\rho_0}{3 \cdot \mathfrak{R}^2} + \frac{\Lambda}{3} \cdot \mathfrak{R} \quad (4.2)$$

Ligning (4.2) er af 2. orden. Ligningen er ækvivalent med nedenstående 1. ordens differential-ligning (4.3). At de to ligninger er ækvivalente betyder, at de har de samme løsninger.

$$(\mathfrak{R}')^2 = 8/3 \cdot \pi G\rho_0 \cdot \mathfrak{R}^{-1} + \Lambda/3 \cdot \mathfrak{R}^2 + \alpha, \quad (4.3)$$

hvor α er en konstant (= uafhængig af tiden t).

Bevis I ligning (4.3) differentieres med hensyn til t på begge sider af lighedstegnet, hvorefter den fremkomne ligning divideres igennem med $2 \cdot \mathfrak{R}'$:

$$2 \cdot \mathfrak{R}' \cdot \mathfrak{R}'' = -8/3 \cdot \pi G\rho_0 \cdot \mathfrak{R}^{-2} \cdot \mathfrak{R}' + 2\Lambda/3 \cdot \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{R}' \Leftrightarrow \mathfrak{R}'' = -4/3 \cdot \pi G\rho_0 \cdot \mathfrak{R}^{-2} + \Lambda/3 \cdot \mathfrak{R} \text{ . Bevis slut.}$$

Traditionelt skrives konstanten i (4.3) på formen $\alpha = -K_0 \cdot c^2$, hvor c er lysets hastighed i vacuum. Ligning (4.3) kan følgelig skrives:

$$(\mathfrak{R}')^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3 \cdot \mathfrak{R}} + \frac{\Lambda \cdot \mathfrak{R}^2}{3} - K_0 \cdot c^2 \quad (4.4)$$

Denne ligning er endnu en version af Friedmann-ligningen (4.1). Men det er ikke den sidste, vi vil betragte. Ved at genindføre $\rho \doteq \rho_0/\mathfrak{R}^3$ i (4.4) fås nemlig:

$$(\mathfrak{R}')^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3 \cdot \mathfrak{R}} + \frac{\Lambda \cdot \mathfrak{R}^2}{3} - K_0 \cdot c^2 \Leftrightarrow (\mathfrak{R}')^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} \cdot \mathfrak{R}^2 + \frac{\Lambda \cdot \mathfrak{R}^2}{3} - K_0 \cdot c^2 \Leftrightarrow$$

$$(\mathfrak{R}')^2 = \frac{8\pi G}{3} \cdot \left(\rho + \frac{\Lambda}{8\pi G}\right) \cdot \mathfrak{R}^2 - K_0 \cdot c^2 \quad (4.5)$$

4.3 Vacuummassetætheden

I ligning (4.5) afhænger $\mathcal{R}(t)$, $\mathcal{R}'(t)$ og $\rho(t)$ alle af tiden t , mens G , Λ og K_0 er konstanter. Det ses, at hvis Λ er forskellig fra nul, så vil kraften F_Λ virke som om der er et *konstant* bidrag til rummets masetæthed. Dette kan forstås på den måde, at rummet i sig selv besidder en vis *vacuummassetæthed*

$$\rho_{\text{vacuum}} = \Lambda/(8\pi G) \quad (4.6)$$

Undertiden omtales dette fænomen som en *vacuumenergitæthed* $\Lambda/(8\pi G) \cdot c^2$ i overensstemmelse med Einsteins berømte masse-energi relation $E = m \cdot c^2$.

Hvis Universet udvider sig ud over alle grænser, vil rummets masetæthed ρ blive meget lille, men vacuumbidraget vil stadigvæk være der. Kraften F_Λ adskiller sig markant fra gravitationskraften ved, at F_Λ vokser med afstanden. Jo længere væk, jo stærkere er kraften på den pågældende galakse. Netop denne egenskab gør, at F_Λ i modsætning til F_G ikke får æbler til at falde ned fra træer og lignende, så derfor er F_Λ ikke tilgængelig for målinger på samme måde som F_G . Om den kosmologiske konstant Λ i vores Univers er forskellig fra nul eller ej, er i dag et forholdsvis åbent spørgsmål, og det er en af de helt store udfordringer i det nye årtusinde at få en sikker afgørelse.

Det skal dog bemærkes, at den fremherskende mening blandt professionelle kosmologer siden 1990'erne har været, at Λ *ikke* er nul (men positiv).

Den populæreste værdi i år 2003 var:

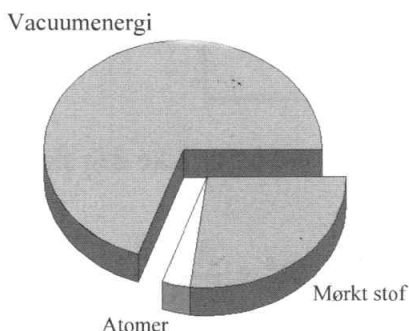
$$\Lambda = 1,16 \cdot 10^{-35} \text{ s}^{-2} \quad (4.7)$$

Med denne værdi for den kosmologiske konstant fås

$$\frac{\Lambda}{8\pi G} = 6,9 \cdot 10^{-27} \text{ kg/m}^3 \quad (4.8)$$

Selvom dette sammenlignet med jordiske forhold er en ekstrem lille densitet, så er det 2,7 gange mere end dagens bedste bud på Universets nuværende densitet ρ_0 . I det nuværende Univers ser F_Λ -kraften således ud til at være væsentligere end gravitationskraften !

Universets indhold af masse/energi



Kun ca. 4 % af Universets indhold af masse/energi menes at være i form af "almindeligt" stof (= atomer). Ca. 23 % menes at være mørkt stof (som man har idéer til, hvad kan være), mens hele 73 % er vacuumenergi (som man faktisk ikke aner, hvad er). Både det mørke stof og vacuumenergien kan kun observeres indirekte via deres virkning på omgivelserne.

4.4 Krumning

Ligning (4.4) gælder for alle t . Sættes specielt $t = t_0$ fås (idet $\mathfrak{R}(t_0) = 1$) :

$$\mathfrak{R}'(t_0)^2 = 8\pi G\rho_0/3 + \Lambda/3 - K_0 \cdot c^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$K_0 \cdot c^2 = 8\pi G\rho_0/3 + \Lambda/3 - \mathfrak{R}'(t_0)^2 \quad (4.9)$$

Konstanten K_0 har forskellige fortolkninger inden for Newtons og Einsteins teorier. Ifølge Einstein angiver K_0 *rummets nuværende krumning*. At vores tredimensionale rum skulle kunne tænkes at krumme er slet ikke inde i Newtons verdensbillede, så her kan der ikke skydes genvej med snydeargumenter til den einsteinske fortolkning.

K_0 har dimensionen længde^{-2} , det vil sige, at SI-enheden er meter^{-2} . Uden bevis nævnes, at rummets krumning $K(t)$ til tiden t er givet ved

$$K(t) = \frac{K_0}{\mathfrak{R}(t)^2} \quad (4.10)$$

Af (4.10) ses eksempelvis, at selvom *størrelsen* af rummets krumning i almindelighed vil afhænge af tiden, så vil *fortegnet* på krumningen være det samme til alle tider. Eftersom det netop er fortegnet på krumningen, der afgør rummets geometri, så vil denne i et støv-univers være den samme til alle tider. I et *positivt* krumt rum kaldes geometrien *sfærisk*, og rummet siges at være *endeligt/lukket*. I et *negativt* krumt rum kaldes geometrien *hyperbolsk*, og rummet siges at være *uendeligt/åbent*. I et rum med krumning nul kaldes geometrien *euklidisk*, og rummet siges at være *fladt* (det er også uendeligt).

Ved et rums *krumningsradius* R forstås

$$R = |K_0|^{-1/2} \quad (\text{Hvis } K_0 \text{ er nul, så sættes } R = +\infty) \quad (4.11)$$

Krumningsradius R har dimensionen *længde*, altså SI-enheden *meter*. R angiver en karakteristisk længde, som løst sagt kan bruges som målestok for, hvor store afstande i Universet, man skal betragte, før rummets eventuelle krumning tydeligt vil vise sig. I det sfæriske tilfælde, hvor rummet er endeligt, er R tillige et mål for rummets størrelse, idet $\pi \cdot R$ angiver den størst mulige afstand mellem to punkter i rummet.

4.5 Tidlige Big Bang universer

I et univers, der starter med et Big Bang, vil skalafaktoren $\mathfrak{R}$ i universets tidlige historie være meget lille, og universets massetæthed ρ givet ved (3.14):

$$\rho = \frac{4\sigma}{c^3} \left(\frac{T_0}{\mathfrak{R}}\right)^4$$

Af dette udtryk ses, at når $\mathfrak{R} \rightarrow 0$, så vil både ρ og $\rho \cdot \mathfrak{R}^2$ gå mod uendelig. Følgelig er det i grænsen $\mathfrak{R} \rightarrow 0$ en overordtlig god tilnærmelse at erstatte Friedmann-ligningen (4.5) med

$$(\mathfrak{R}')^2 = \frac{8\pi G}{3} \cdot \rho \cdot \mathfrak{R}^2$$

$$\text{Bevis: } (\mathfrak{R}')^2 = \frac{8\pi G}{3} \cdot \left(\rho + \frac{\Lambda}{8\pi G}\right) \cdot \mathfrak{R}^2 - K_0 \cdot c^2 \approx \frac{8\pi G}{3} \cdot \rho \cdot \mathfrak{R}^2 - K_0 \cdot c^2 \approx \frac{8\pi G}{3} \cdot \rho \cdot \mathfrak{R}^2$$

Ved indsættelse af ovenstående udtryk for ρ fås:

$$(\mathfrak{R}')^2 = \frac{8\pi G \cdot 4\sigma \cdot T_0^4}{3 \cdot c^3 \cdot \mathfrak{R}^4} \cdot \mathfrak{R}^2 = \frac{32\pi G\sigma \cdot T_0^4}{3c^3 \cdot \mathfrak{R}^2} \Leftrightarrow \mathfrak{R}' = p/\mathfrak{R}, \text{ hvor } p = \sqrt{\frac{32\pi G\sigma \cdot T_0^4}{3c^3}}$$

Ligningen $\mathfrak{R}' = p/\mathfrak{R}$ har løsningen $\mathfrak{R}(t) = \sqrt{2p} \cdot \sqrt{t}$, så

$$\mathfrak{R}(t) = (128/3 \pi G \sigma c^{-3})^{1/4} \cdot T_0 \cdot \sqrt{t} = 1,797 \cdot 10^{-10} \cdot \sqrt{t/\text{sek}} \quad (4.12)$$

Bemærk, at dette udtryk for $\mathfrak{R}(t)$ ikke indeholder andet end naturkonstanter og T_0 . Det er uafhængigt af værdierne af både ρ_0 , Λ og K_0 !

Konklusionen er, at alle Big Bang universer i starten har samme udviklingstakt; nemlig den der er bestemt ved ligning (4.12).

Eftersom Universets temperatur er givet ved $T = T_0/\mathfrak{R}$, fås for sammenhængen mellem temperaturen T og tiden t i det tidlige Big Bang univers:

$$t = 2,31 \cdot 10^{20} \text{ sek} / (T/K)^2 \quad (4.13)$$

4.6 Fire historisk berømte Friedmann-universer

Friedmannligningen (4.2) har altid en løsning for givne værdier af Hubble-parametren, den nuværende massetæthed og den kosmologiske konstant. Givne værdier for ρ_0 , Λ og H_0 fastlægger entydigt skalafaktoren $\mathfrak{R}(t)$ som funktion af t ; det vil sige, hvordan Universet udvikler sig fra start til slut. Hvilke værdier ρ_0 , Λ og H_0 har i vores Univers, fortæller den generelle relativitetsteori ikke noget om. Det må alene afgøres ved *eksperimentelle* observatio-

ner. Selvom der sandsynligvis vil gå en del år, før disse tre naturkonstanter bliver bestemt med stor nøjagtighed, så kan vi allerede i dag karakterisere de forskellige muligheder, der er både for Universets fortid og for dets fremtid.

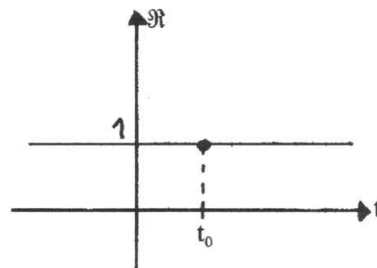
I skemaet er vist karakteristiske egenskaber for fire historisk betydningsfulde Friedmann-universer. De tre første modeller fremkommer som løsninger til Friedmannligningen, som har formen $\mathfrak{R}(t) = b \cdot t^a$ (potensfunktioner). Den fjerde model er den eneste løsning af formen $\mathfrak{R}(t) = b \cdot e^{at}$ (eksponentielt voksende funktioner). I rammen side 58 er vist, hvordan de forskellige størrelser i skemaet er fremkommet.

Model	Skalafaktor	Alder	ρ_0	Λ	K_0
Einstein (1917)	$\mathfrak{R}(t) = 1$	Universet er uendeligt gammelt	Ingen teoretisk forudsigelse	$4\pi G\rho_0$	$4\pi G\rho_0/c^2$
de Sitter (1917)	$\mathfrak{R}(t) = e^{H_0(t-t_0)}$	Universet er uendeligt gammelt	0	$3 \cdot H_0^2$	0
Milne (1932)	$\mathfrak{R}(t) = t/t_0$	$t_0 = T_H$	0	0	$-1/L_H^2$
Einstein/de Sitter (1931)	$\mathfrak{R}(t) = (t/t_0)^{2/3}$	$t_0 = 2/3 \cdot T_H$	$3H_0^2/(8\pi G)$	0	0

Einsteins model (1917)

Det var *Albert Einstein*, der i 1917 som den første anvendte sin egen relativitetsteoris generelle formalisme på Universet som helhed. På det tidspunkt var Hubble endnu ikke kommet på banen, og selv om teoriens ligninger i høj grad lægger op til løsninger, der indebærer et ikke-statisk univers, så vandt Einsteins indgroede filosofiske tro på "verdensaltets uforanderlighed" helt over, hvad matematikken ellers fortalte ham. Einstein insisterede på et *statisk* univers, det vil sige et univers, der hverken udvider sig eller trækker sig sammen. For at få det viste det sig nødvendigt at indføre den kosmologiske konstant Λ . I et statisk univers skal der en kosmologisk frastødende kraft til at kompensere for de tiltrækkende gravitationskræfter. Ellers ville universet falde sammen under sin egen tyngde.

Einsteins statiske univers



Figuren viser grafen for $\mathfrak{R}(t) = 1$. Modellen er et eksempel på et univers uden en egentlig begyndelse. Det er således her uden mening at tale om universets alder.

Gravitationskraften $F_G = -4\pi G\rho/3 \cdot r$ og lambdakraften $F_\Lambda = m\Lambda/3 \cdot r$ på en galakse i afstanden r skal ifølge modellen være (numerisk) lige store, og dette fastlægger værdien af Λ :

$$4\pi G\rho/3 \cdot r = m\Lambda/3 \cdot r \Leftrightarrow \Lambda = 4\pi G\rho$$

Af skemaet side 55 ses, at når massetætheden ρ_0 er bestemt eksperimentelt, så er både Λ og K_0 fastlagt. Bemærk at K_0 er positiv. Einsteins statiske univers er *endeligt*, og geometrien er *sfærisk*.

Med Hubbles bedste bud i 1934 på universets massetæthed $\rho_0 \approx 10^{-27} \text{ kg/m}^3$ fås:

$\Lambda = 8 \cdot 10^{-37} \text{ s}^{-1}$, $K_0 = 9 \cdot 10^{-54} \text{ m}^{-2}$ og $R = 3 \cdot 10^{26} \text{ m} = 35 \text{ Gly}$. Ifølge Einsteins model skulle den størst mulige afstand i Universet således være $\pi \cdot R \sim 100 \text{ Gly}$.

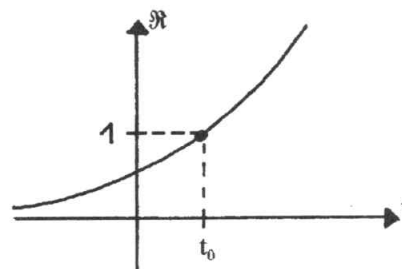
Efter Hubbles opdagelse af at Universet udvider sig, var Einsteins statiske univers ikke længere relevant som model for det virkelige Univers, og man kunne så være fristet til helt at kassere Λ , som jo oprindeligt blev født i forbindelse med denne model. Dette har også været hovedtenden- sen i kosmologien i 1900-tallet. Einstein omtalte selv opfindelsen af Λ som "my greatist scientific blunder". Men hvis Einstein havde troet mere på sin egen teori end på en filosofisk "fordom", så havde han på teoretisk grundlag 12 år før Hubbles eksperimentelle opdagelse kunnet forudsige et af 1900-tallets største videnskabelige opdagelser: "Universet udvider sig". Her i begyndelsen af det nye årtusinde har Λ fået en renaissance, idet eksperimentelle data synes at vise, at Universet ikke blot udvider sig. Det accelererer! Denne acceleration kræver tilstedeværelse af frastødende kræfter, det vil sige en positiv værdi for Λ .

de Sitters model (1917)

Samme år som Einstein præsenterede sin sta- tiske model beskrev hollænderen *Willelm de Sitter* en anden mulig universtype inden for den generelle relativitetsteoris rammer. I denne mo- del er krumningen nul, så rummet er *fladt*, og geometrien er *euklidisk*. Rummets udvidelseshastighed $\mathcal{R}'(t)/\mathcal{R}(t)$ er ens til alle tider. Modellens umiddelbare svaghed er, at massetætheden ρ_0 er nul. Dette er unægtelig en noget urealistisk situation, men modellen er alligevel relevant til at beskrive et meget tyndt besat univers med krumning nul.

Det er i dag alment accepteret, at Universet kort efter Big Bang gennemløb en ultrakort periode med eksplosiv vækst (= *inflation*), og i denne fase af udviklingen er Universet netop et de Sitter-univers.

de Sitter-univers



Figuren viser grafen for $\mathcal{R}(t) = e^{H_0(t-t_0)}$.

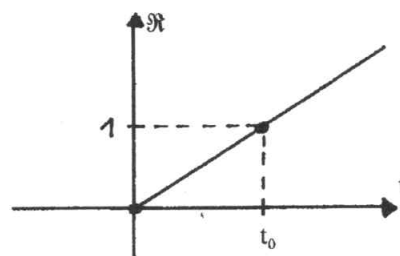
Modellen er et eksempel på et evigt ekspanderende univers uden en egentlig begyndelse. Det er således her uden mening at tale om Universets nuværende alder.

Milnes model (1932)

Englænderen *Edward Milne* har lagt navn til det "lineære univers". I denne model har universet en begyndelse. Med dette menes, at når grafen for skalafaktoren forfølges tilbage i tiden, så skærer den på et tidspunkt førsteaksen. Til dette tidspunkt må *hele* universet være samlet i et eneste punkt, idet *alle* indbyrdes afstande jo så er nul. Denne noget specielle begivenhed går som tidligere nævnt under betegnelsen *The Big Bang*, og fortolkes som Universets fødsel. Det er ikke er muligt ved hjælp af de kendte naturlove at beskrive universet *helt* tilbage til det øjeblik, hvor $\mathcal{R} = 0$. Dette kræver formodentlig andre beskrivelsesmåder end rent naturviden- skabelige; såsom religiøse/filosofiske.

På den måde markerer Big Bang begivenheden i kosmologisk forstand en naturlig start. Milnes model lider af samme svaghed som de Sitters; nemlig den noget ufysiske antagelse, at masse-tætheden ρ_0 ikke bare er lille, men at den er nul. Modellen kan således i bedste fald bruges til en tilnærmelsesvis beskrivelse af meget tyndt besatte universer. Til gengæld får vi her et bud på Universets alder $t_0 = T_H = 14,9$ Går samt på rummets krumningsradius $R = L_H = 14,9$ G ly. Eftersom krumningen er negativ, er rummet i et Milne-univers *uendeligt*, og geometrien er *hyperbolsk*.

Milne-univers

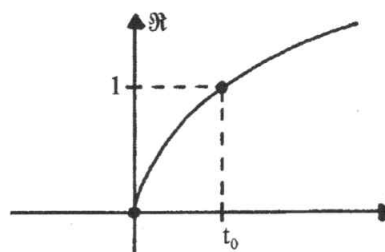


Figuren viser grafen for $R(t) = t/t_0$. Modellen er et eksempel på et evigt ekspanderende univers med en Big-Bang start.

Einstein/de Sitters model (1931)

Einstein - de Sitter universet anvendes ofte som en forenklet men dog nogenlunde realistisk model for det virkelige univers. Dette skyldes flere ting. For det første er det et forholdsvis simpelt univers: både krumningen K_0 og den kosmologiske konstant Λ er nul. Geometrien er således den sædvanlige *euklidiske* i det sædvanlige 3-dimensionale rum, og det er alene gravitationskræfterne, der regerer. Endvidere er skalafaktorens afhængighed af tiden en velkendt funktionstype (nemlig en potensfunktion), som det er bekvemt at regne på.

Einstein - de Sitter univers



Figuren viser grafen for $R(t) = (t/t_0)^{2/3}$. Efter en Big-Bang start haves et vedvarende ekspanderende univers. Rummets udvidelseshastighed bliver dog mindre og mindre for til sidst næsten at gå i stå.

For det andet skyldes modellens popularitet, at den giver en *teoretisk* værdi for Universets massetæthed $\rho_0 = \rho_c$. Denne massetæthed kaldes den *kritiske massetæthed* og er givet ved

$$\rho_c \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (4.14)$$

Det er bemærkelsesværdigt, at denne rent teoretiske størrelse er af samme størrelsesorden som Universets faktiske massetæthed ρ_0 . Favoritværdien for ρ_0 her i begyndelsen af det ny årtusinde er $\rho_0 \approx 0,27 \cdot \rho_c$. Mange kosmologer drømmer endog om, at fremtidige mere pålidelige data vil vise, at ρ_0 i virkeligheden er eksakt lig ρ_c .

Ved indsættelse af værdien (1.2) for H_0 i (4.14) fås:

$$\rho_c = 9,5 \cdot 10^{-27} \text{ kg/m}^3 = 5,7 \text{ u/m}^3 \quad (4.15)$$

Endelig kan det fremhæves, at Universets alder ifølge denne model er fastlagt til $2/3 \cdot T_H$. Med værdien (1.10) for T_H fås $t_0 = 9,2$ milliarder år.

Forklaring til oversigten over de fire historisk berømte Friedmann-universer

Skalafaktorer af formen $\mathcal{R}(t) = b \cdot t^a$, $b \neq 0$

Ved at differentiere fås: $\mathcal{R}'(t) = a \cdot b \cdot t^{a-1}$ og $\mathcal{R}''(t) = (a-1) \cdot a \cdot b \cdot t^{a-2}$.

Udtrykkene for $\mathcal{R}(t)$ og $\mathcal{R}''(t)$ indsættes i Friedmannligningen (4.2):

$$(a-1) \cdot a \cdot b \cdot t^{a-2} = - (4\pi G \rho_0) / (3 \cdot b^2 \cdot t^{2a}) + \Lambda / 3 \cdot b \cdot t^a \Leftrightarrow 3a(a-1)b^3 \cdot t^{3a-2} = -4\pi G \rho_0 + \Lambda b^3 \cdot t^{3a}.$$

Denne ligning skal være opfyldt for *alle* t , og det er den kun for $a = 0$, $a = 1$ og $a = 2/3$.

$a = 0$ Einstein 1917

For $a = 0$ bliver $\mathcal{R}(t) = b \cdot t^a = b \cdot t^0 = b$. Dette betyder, at $b = 1$, idet $\mathcal{R}(t_0) = 1$.

Med $a = 0$ og $b = 1$ fås af ligningen $3a(a-1)b^3 \cdot t^{3a-2} = -4\pi G \rho_0 + \Lambda b^3 \cdot t^{3a}$: $0 = -4\pi G \rho_0 + \Lambda \Leftrightarrow \Lambda = 4\pi G \rho_0$.

Krumningen kan nu bestemmes af (4.9): $K_0 \cdot c^2 = 8\pi G \rho_0 / 3 + 4\pi G \rho_0 / 3 - 0 = 4\pi G \rho_0$.

$a = 1$ Milne 1932

For $a = 1$ bliver $\mathcal{R}(t) = b \cdot t^a = b \cdot t$. Dette betyder, at $b = 1/t_0$, idet $\mathcal{R}(t_0) = 1$.

Med $a = 1$ fås af ligningen $3a(a-1)b^3 \cdot t^{3a-2} = -4\pi G \rho_0 + \Lambda b^3 \cdot t^{3a}$: $0 = -4\pi G \rho_0 + \Lambda \cdot b^3 \cdot t^3$.

Eftersom denne ligning skal være opfyldt for *alle* t , må både Λ og ρ_0 være nul. Krumningen kan nu bestemmes af (4.9), idet det udnyttes, at $\mathcal{R}'(t_0) = H_0$: $K_0 \cdot c^2 = 0 + 0 - H_0^2 \Leftrightarrow K_0 = - (H_0/c)^2 = -1/L_H^2$.

$a = 2/3$ Einstein/de Sitter 1931

For $a = 2/3$ bliver $\mathcal{R}(t) = b \cdot t^{2/3}$. Dette betyder, at $b = t_0^{-2/3}$, idet $\mathcal{R}(t_0) = 1$.

Betingelsen $\mathcal{R}'(t_0) = H_0$ giver: $2/3 \cdot b \cdot t_0^{-1/3} = H_0 \Leftrightarrow 2/3 \cdot t_0^{-2/3-1/3} = H_0 \Leftrightarrow 2/3 \cdot H_0^{-1} = t_0$.

Med $a = 2/3$ fås af ligningen $3a(a-1)b^3 \cdot t^{3a-2} = -4\pi G \rho_0 + \Lambda b^3 \cdot t^{3a}$:

$$3 \cdot 2/3 \cdot (-1/3) \cdot b^3 \cdot t^0 = -4\pi G \rho_0 + \Lambda \cdot b^3 \cdot t^2 \Leftrightarrow -2/3 \cdot b^3 = -4\pi G \rho_0 + \Lambda \cdot b^3 \cdot t^2.$$

Eftersom denne ligning skal være opfyldt for *alle* t , må Λ være nul. Herefter fås:

$$-2/3 \cdot b^3 = -4\pi G \rho_0 \Leftrightarrow t_0^{-2} = 6\pi G \rho_0 \Leftrightarrow (2/3 H_0^{-1})^{-2} = 6\pi G \rho_0 \Leftrightarrow 9 \cdot H_0^2 / 4 = 6\pi G \rho_0 \Leftrightarrow \rho_0 = 3 H_0^2 / (8\pi G).$$

Krumningen kan nu bestemmes af (4.9), idet det udnyttes, at $\mathcal{R}'(t_0) = H_0$:

$$K_0 \cdot c^2 = 8\pi G / 3 \cdot 3 H_0^2 / (8\pi G) + 0 - H_0^2 = H_0^2 - H_0^2 = 0.$$

Skalafaktorer af formen $\mathcal{R}(t) = b \cdot e^{at}$, $b \neq 0$

de Sitter 1917

Ved at differentiere fås: $\mathcal{R}'(t) = a \cdot b \cdot e^{at} = a \cdot \mathcal{R}(t)$ og $\mathcal{R}''(t) = a^2 \cdot b \cdot e^{at}$.

Betingelsen $\mathcal{R}'(t_0) = H_0$ giver: $a \cdot \mathcal{R}(t_0) = H_0 \Leftrightarrow a = H_0$.

Udtrykkene for $\mathcal{R}(t)$ og $\mathcal{R}''(t)$ indsættes i Friedmannligningen (4.2):

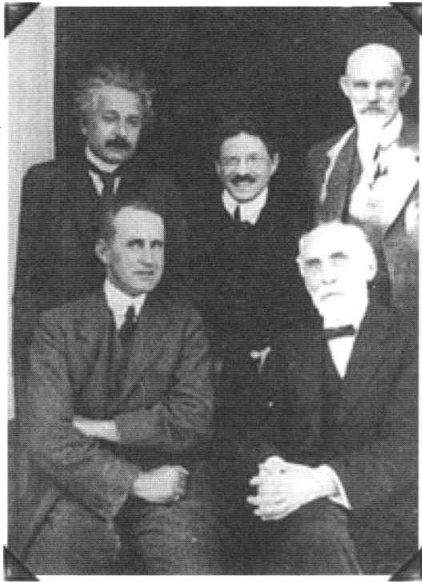
$$a^2 \cdot b \cdot e^{at} = - (4\pi G \rho_0) / (3 \cdot b^2 \cdot e^{2at}) + \Lambda / 3 \cdot b \cdot e^{at} \Leftrightarrow 3 \cdot b^3 \cdot a^2 \cdot e^{3at} = -4\pi G \rho_0 + \Lambda \cdot b^3 \cdot e^{3at}.$$

Denne ligning skal være opfyldt for *alle* t , så ρ_0 må være nul.

Herefter fås:

$$3 \cdot b^3 \cdot a^2 \cdot e^{3at} = \Lambda \cdot b^3 \cdot e^{3at} \Leftrightarrow 3 \cdot a^2 = \Lambda \Leftrightarrow \Lambda = 3 \cdot H_0^2.$$

Krumningen kan nu bestemmes af (4.9), idet det udnyttes, at $\mathcal{R}'(t_0) = H_0$: $K_0 \cdot c^2 = 0 + 3 \cdot H_0^2 / 3 - H_0^2 = 0$.



Bagest fra venstre:
Albert Einstein, Paul Ehrenfest, Willelm de Sitter.
Forrest fra venstre:
Arthur Eddington og Hendrik Lorentz.

4.7 De kosmologiske standardenheder

At regne i *kosmologiske standardenheder* betyder:

☞ at længder udtrykkes i enheder af L_H

☞ at tidsrum udtrykkes i enheder af T_H

Følgelig er $L_H = T_H = 1$ i dette enhedssystem.

(4.16)

Herved bliver hastighed en ubenævnt størrelse, hvis talværdi angiver hastigheden i forhold til lyshastigheden c , der således får værdien 1.

Endvidere er $H_0 = 1$ i dette enhedssystem.

Eksempel

Hvis afstanden til en given galakse i kosmologiske enheder er 0,020, så betyder det, at afstanden er $0,020 \cdot L_H = 0,020 \cdot (13,8 \text{ Gly}) = 0,28 \text{ Gly}$.

Hvis en given galakse i kosmologiske enheder anses for at have alderen 0,60, så betyder det, at alderen er $0,60 \cdot T_H = 0,60 \cdot (13,8 \text{ Går}) = 8,3 \text{ Går}$.

Hvis en given galakse i kosmologiske enheder bevæger sig med hastigheden 0,40, så betyder det, at hastigheden er $0,40 \cdot c = 0,40 \cdot (3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}) = 1,20 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Hubble-loven $v_0 = H_0 \cdot r_0$ bliver til $v_0 = r_0$. Regnet i kosmologiske standardenheder er talværdien for en galakses nuværende hastighed lig talværdien for dens nuværende afstand.

Hvis $\mathcal{R}'(0,6)/\mathcal{R}(0,6) = 0,07$ (i kosmologiske enheder), så betyder det, at rummets udvidelseshastighed til tiden $t = 0,6 \cdot T_H$ er $0,07/T_H$.

Hvis $\mathcal{R}''(0,3) = 0,04$ (i kosmologiske enheder), så betyder det, at rummets acceleration til tiden $t = 0,3 \cdot T_H$ er $0,04/T_H^2$.

Hvis $K_0 = 1/4$ (i kosmologiske enheder), så betyder det, at $K_0 = 1/(4 \cdot L_H^2) \Leftrightarrow R = 2 \cdot L_H$.

Divideres Friedmann-ligningen på formen (4.1) igennem med H_0^2 fås:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}'' &= -\frac{4\pi G\rho_0}{3\cdot\mathfrak{R}^2} + \frac{\Lambda}{3}\cdot\mathfrak{R} \Leftrightarrow \frac{\mathfrak{R}''}{H_0^2} = -\frac{4\pi G\rho_0}{3H_0^2\cdot\mathfrak{R}^2} + \frac{\Lambda}{3H_0^2}\cdot\mathfrak{R} \Leftrightarrow \\ \frac{\mathfrak{R}''}{H_0^2} &= -\frac{\rho_0}{2\cdot(3H_0^2/(8\pi G))\cdot\mathfrak{R}^2} + \frac{\Lambda}{3H_0^2}\cdot\mathfrak{R} \Leftrightarrow \frac{\mathfrak{R}''}{H_0^2} = -\frac{\rho_0}{2\cdot\rho_c\cdot\mathfrak{R}^2} + \frac{\Lambda}{3H_0^2}\cdot\mathfrak{R} \Leftrightarrow \\ \frac{\mathfrak{R}''}{H_0^2} &= -\frac{\Omega_0}{2\cdot\mathfrak{R}^2} + \Omega_\Lambda\cdot\mathfrak{R} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Her er indført to ubenævnte størrelser; nemlig *massetæthedsparmeteren* Ω_0 og *vacuumtæthedsparmeteren* Ω_Λ :

$$\Omega_0 \equiv \frac{\rho_0}{\rho_c} \quad \text{og} \quad \Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{3H_0^2} \quad (4.18)$$

Ifølge definitionen på massetæthedsparmeteren, så *angiver værdien af Ω_0 Universets nuværende massetæthed i forhold til den kritiske massetæthed*. Eksempelvis betyder $\Omega_0 = 1/2$, at ρ_0 er halvt så stor som ρ_c , og $\Omega_0 < 1$ betyder, at ρ_0 er mindre end ρ_c . Vacuumtæthedsparmeteren kan fortolkes på lignende måde. *Værdien af Ω_Λ angiver vacuum-massetætheden ρ_{vacuum} (4.6) i forhold til den kritiske massetæthed*.

$$\text{Bevis: } \frac{\rho_{\text{vacuum}}}{\rho_c} = \frac{\Lambda/(8\pi G)}{3H_0^2/(8\pi G)} = \frac{\Lambda}{3H_0^2} = \Omega_\Lambda.$$

Hvis eksempelvis $\Omega_\Lambda = 1/2$, så betyder det følgelig, at ρ_{vacuum} er halvt så stor som ρ_c .

Divideres Friedmann-ligningen på formen (4.4) med H_0 fås på lignende måde som ovenfor

$$(\mathfrak{R}')^2 \cdot T_H^2 = \frac{\Omega_0}{\mathfrak{R}} + \Omega_\Lambda \cdot \mathfrak{R}^2 - K_0 \cdot L_H^2 \quad (4.19)$$

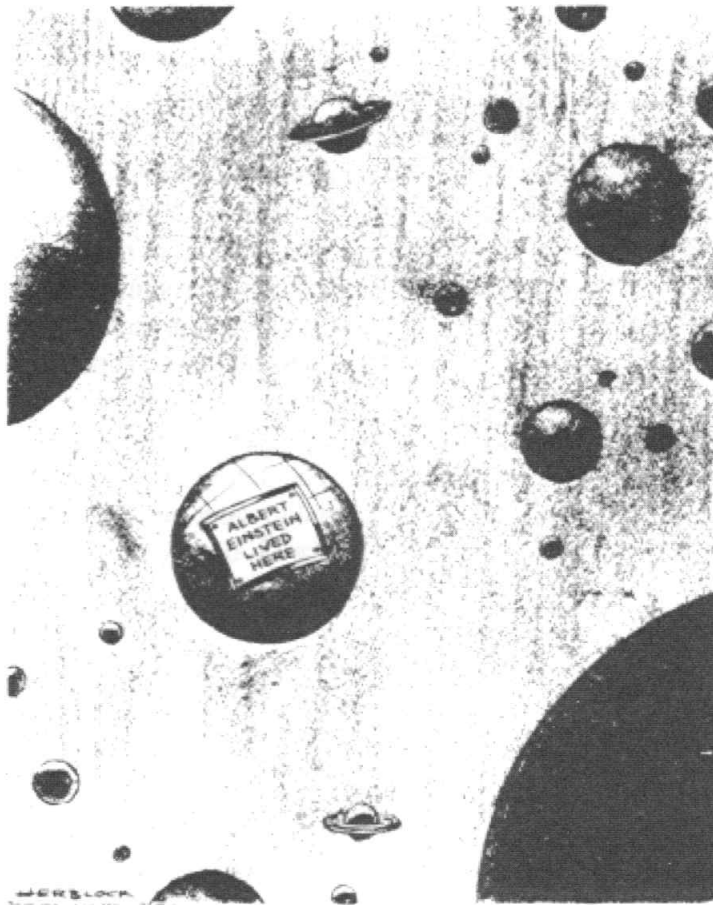
Suppleret med de to "begyndelsesbetingelser" $\mathfrak{R}(t_0) = 1$ og $\mathfrak{R}'(t_0) = H_0$ fastlægger både ligning (4.17) og (4.19) entydigt skalafaktoren $\mathfrak{R}$ som funktion af tiden t (for givne værdier af Ω_0 og Ω_Λ). Udtrykt i kosmologiske enheder tager det sig således ud:

$$\mathfrak{R}'' = -\frac{\Omega_0}{2\cdot\mathfrak{R}^2} + \Omega_\Lambda\cdot\mathfrak{R}, \quad \mathfrak{R}(t_0) = 1 \text{ og } \mathfrak{R}'(t_0) = 1$$

(4.20)

$$(\mathfrak{H})^2 = \frac{\Omega_0}{\mathfrak{H}} + \Omega_\Lambda \cdot \mathfrak{H}^2 - K_0, \quad \mathfrak{H}(t_0) = 1 \text{ og } \mathfrak{H}'(t_0) = 1 \quad (4.21)$$

Disse to standardformer for Friedmann-ligningen er velegnet til at skaffe sig et overblik over de forskellige mulige universtyper, som den generelle relativitetsteori tillader. Dette vil være emnet for næste kapitel, hvor det overalt vil være underforstået, at der regnes i kosmologiske enheder.



Albert Einstein døde d. 18. april 1955

Kapitel 5

De mange muligheder

5.1 De grundlæggende kosmologiske parametre

De grundlæggende kosmologiske parametre er Hubbleparametren H_0 , Universets massetæthed ρ_0 , den kosmologiske konstant Λ , Universets nuværende krumning K_0 samt Universets nuværende acceleration a_0 .

Hubblekonstanten udmærker sig ved i kosmologiske enheder altid at være lig med 1. Dens afgørende betydning er, at den fastlægger målestokken for både længder og tidsrum. Det er størrelsen af H_0 fx målt i enheden år^{-1} , der "oversætter" længder målt i kosmologiske enheder til længder målt i lysår, og tidsrum målt i kosmologiske enheder til tidsrum målt i år.

Som vi har erfaret, så foretrækker kosmologer at udtrykke værdierne af ρ_0 og Λ gennem de ubenævnte størrelser henholdsvis Ω_0 og Ω_Λ . Den generelle relativitetsteori giver intet bud på, hvor store eller små disse størrelser er i det rigtige univers. Det er noget, som kosmologer og astronomer i sidste ende må *måle* sig frem til. Begge størrelserne må bestemmes *eksperimentelt*. Det ville selvfølgelig være smukt, hvis der fandtes en teoribygning, som forudsagde de sande værdier for Ω_0 og Ω_Λ , men det må vente, til der dukker en Einstein nr. 2 op. Den eksperimentelle bestemmelse er forbundet med ret så store usikkerheder, men mens vi venter på en yderligere afklaring, kan vi muntre os med at få et overblik over de Friedmann-universer, som er konsistente med de nuværende eksperimentelle data. For hvert par af værdier for Ω_0 og Ω_Λ kan vi nemlig løse Friedmann-ligningen fuldstændigt samt bestemme Universets alder t_0 . Universets nuværende krumning K_0 bestemmes ud fra Ω_0 og Ω_Λ ved

$$K_0 = \Omega_0 + \Omega_\Lambda - 1 \quad (5.1)$$

$$\Leftrightarrow \Omega_\Lambda = -\Omega_0 + K_0 + 1 \quad (5.1a)$$

Bevis Sættes t specielt lig t_0 i (4.21) fås: $\mathcal{R}'(t_0)^2 = \frac{\Omega_0}{\mathcal{R}(t_0)} + \Omega_\Lambda \cdot \mathcal{R}(t_0)^2 - K_0 \Leftrightarrow$

$$1^2 = \frac{\Omega_0}{1} + \Omega_\Lambda \cdot 1^2 - K_0 \Leftrightarrow K_0 = \Omega_0 + \Omega_\Lambda - 1.$$

Universets nuværende acceleration a_0 bestemmes ud fra Ω_0 og Ω_Λ ved

$$a_0 = -\Omega_0/2 + \Omega_\Lambda \quad (5.2)$$

$$\Leftrightarrow \Omega_\Lambda = \Omega_0/2 + a_0 \quad (5.2a)$$

Bevis Sættes t specielt lig t_0 i (4.20) fås: $\mathcal{R}'(t_0) = -\frac{\Omega_0}{2 \cdot \mathcal{R}(t_0)^2} + \Omega_\Lambda \cdot \mathcal{R}(t_0) \Leftrightarrow a_0 = -\frac{\Omega_0}{2 \cdot 1^2} + \Omega_\Lambda \cdot 1$
 $\Leftrightarrow a_0 = -\Omega_0/2 + \Omega_\Lambda$.

De fire grundlæggende kosmologiske parametre Ω_0 , Ω_Λ , K_0 og a_0 er ifølge den generelle relativitetsteori således ikke uafhængige. Når det engang i fremtiden er lykkedes at måle hver af de fire størrelser med tilstrækkelig nøjagtighed, så skulle både (5.1) og (5.2) gerne vise sig at være opfyldt. Hvis dette ikke er tilfældet, så er der noget galt med det teoretiske fundament.

De for øjeblikket bedste bud på de grundlæggende kosmologiske parametre:

$$\Omega_0 \approx 0,27 \quad \text{og} \quad \Omega_\Lambda \approx 0,73 \quad \Rightarrow \quad K_0 \approx 0 \quad \text{og} \quad a_0 \approx +0,60 \quad (5.3)$$

Vi skulle således bo i et accelererende, uendeligt univers, hvor de sædvanlige geometriske (= euklidiske) lovmæssigheder gælder.

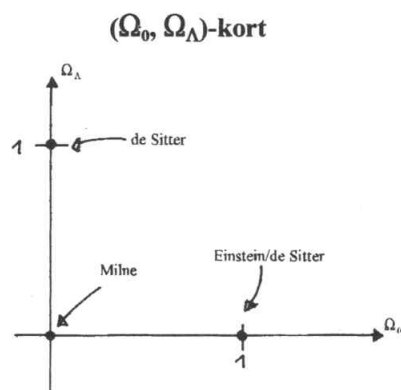
5.2 De forskellige typer Friedmann-universer

Blandt kosmologer har det siden 1930'erne været alment accepteret, at vores Univers på nuværende tidspunkt udvider sig; samt siden 1970'erne at det hele startede med et Big Bang. Derfor vil vi kun interessere os for de løsninger til Friedmann-ligningen, som er konsistente med disse kendsgerninger. Dette betyder eksempelvis, at selv om der matematisk set findes løsninger til Friedmann-ligningen, hvor $\mathcal{R}(t)$ er en overalt aftagende funktion af t , så er en sådan løsning i denne forbindelse ikke relevant.

I Kapitel 4 afsnit 4.6 har vi allerede løst Friedmann-ligningen i fire specialtilfælde:

- 1) Einsteins statiske univers
- 2) de Sitters eksponentielle univers $(\Omega_0, \Omega_\Lambda) = (0, 1)$
- 3) Milnes lineære univers $(\Omega_0, \Omega_\Lambda) = (0, 0)$
- 4) Einstein/de Sitters univers $(\Omega_0, \Omega_\Lambda) = (1, 0)$

For Einsteins statiske univers er Ω_0 og Ω_Λ ikke defineret, idet H_0 ifølge denne model skulle være nul. Modellen kan således ikke indplaceres på et $(\Omega_0, \Omega_\Lambda)$ -kort.

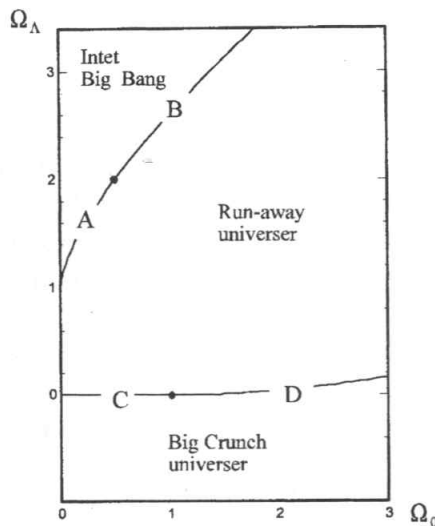


I det følgende vil vi antage, at Ω_0 er positiv (altså at universet ikke er fuldstændigt tomt). Det medfører, at det af ovennævnte fire modeller kun er Einstein/de Sitters univers, der videre frem har vores interesse.

Løsningerne til Friedmann-ligningen for vilkårlige værdier af Ω_0 og Ω_Λ deler $(\Omega_0, \Omega_\Lambda)$ -kortet op i tre områder karakteriseret efter de tre typer af løsninger: "Intet Big Bang", "Run-away universer" og "Big Crunch universer". Se figuren nedenfor. Den øverste grænsekurve (A og B) hører med til kategorien "ingen mulighed for en Big Bang start". Den nederste grænsekurve (C og D) hører hverken til "Run-away universer" eller til "Big Crunch universer", men giver anledning til andre løsningstyper, som snart skal omtales. Ligningerne for grænsekurverne (undtagen for C) fremkommer ved løsning af nedenstående tredjegradslikning med hensyn til Ω_Λ .

$$\Omega_\Lambda = \frac{4 K_0^3}{27 \Omega_0^2} = \frac{4 \cdot (\Omega_0 + \Omega_\Lambda - 1)^3}{27 \Omega_0^2}$$

Forskellige løsningstyper til Friedmann-ligningen



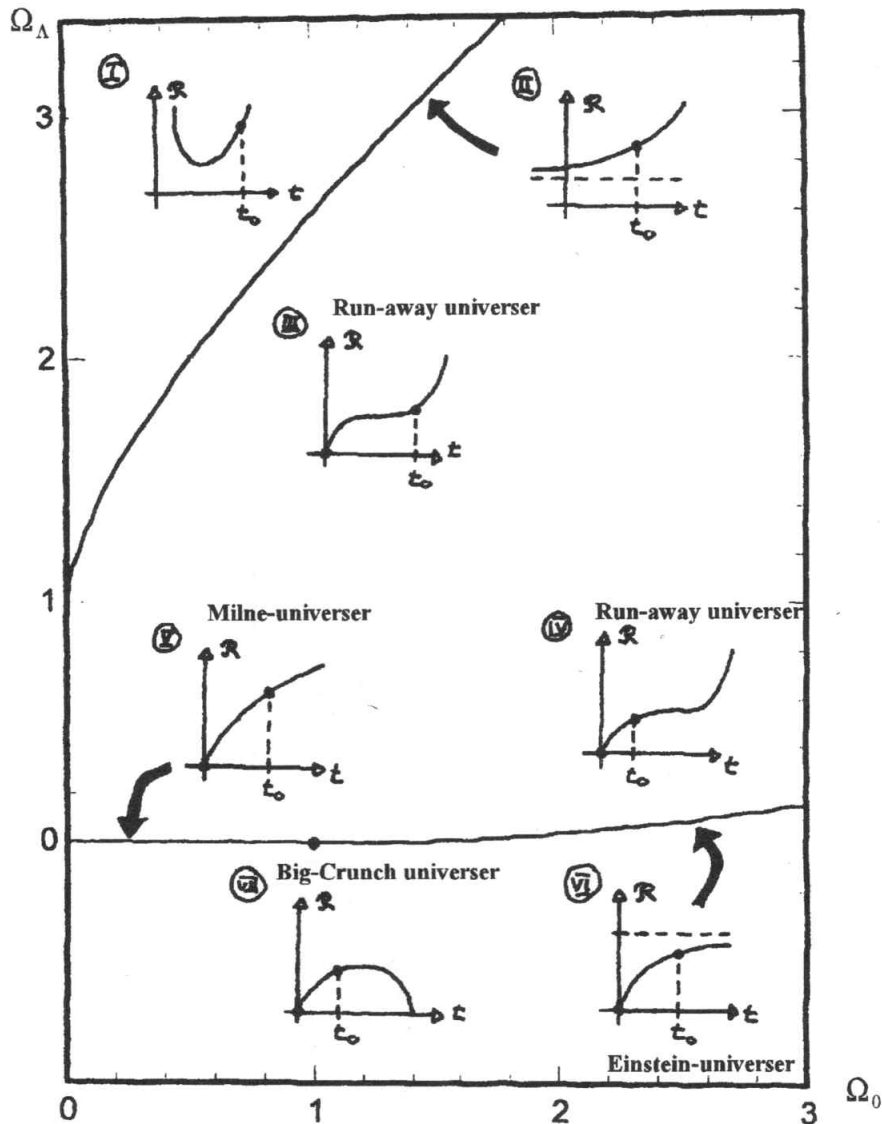
Grænsekurve A: $\Omega_\Lambda = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt[3]{1 - \Omega_0 + (1 - 2\Omega_0)^{1/2}} + \sqrt[3]{1 - \Omega_0 - (1 - 2\Omega_0)^{1/2}} \right)^3$, $0 < \Omega_0 \leq \frac{1}{2}$

Grænsekurve B: $\Omega_\Lambda = 4 \Omega_0 \cdot \cos(\alpha/3)^3$, $\Omega_0 \geq \frac{1}{2}$ hvor $\alpha \equiv \cos^{-1}(1/\Omega_0 - 1)$, $0 \leq \alpha < \pi$

Grænsekurve C: $\Omega_\Lambda = 0$, $0 < \Omega_0 < 1$

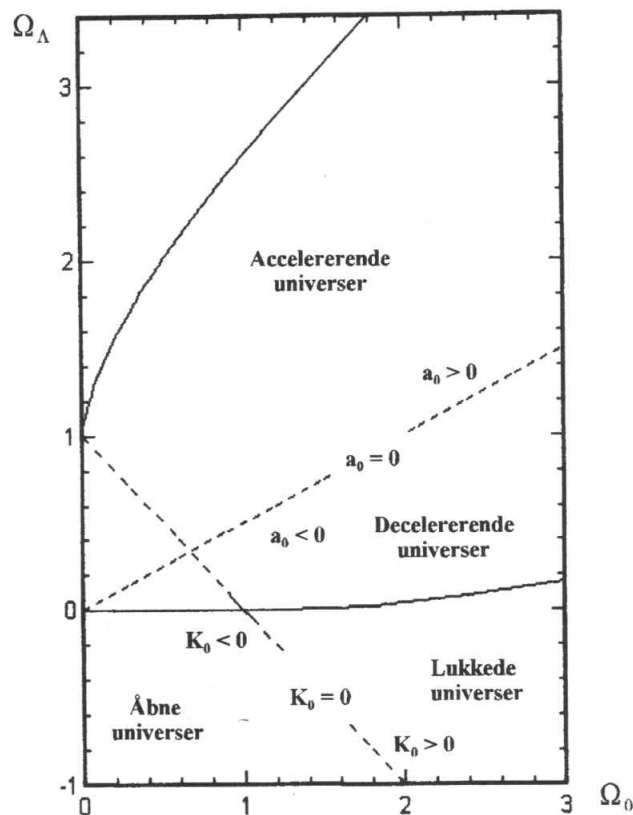
Grænsekurve D: $\Omega_\Lambda = 4 \Omega_0 \cdot \cos(\alpha/3 + 4\pi/3)^3$, $\Omega_0 > 1$

De forskellige løsningstyper til Friedmann-ligningen



- I Ikke Big Bang start
- II Ikke Big Bang start. Modellen beskriver et i starten (næsten) statisk univers, der efterhånden udvikler sig til et accelererende mere og mere tomt univers.
- III+IV *Run-away universer* Big Bang start. Universet er evigt ekspanderende. Først opbremsende, dernæst accelererende. Universet vil vokse ud over alle grænser. Slutscene: Et mere og mere vildt accelererende, mere og mere tomt univers.
- V *Milne-universer* Big Bang start. Universet er evigt ekspanderende og til alle tider opbremsende. Universet vil vokse ud over alle grænser. Slutscene: Et mere og mere tomt univers, hvor den enkelte galakses hastighed efterhånden bliver konstant.
- VI *Einstein-universer* Big Bang start. Universet er evigt ekspanderende og til alle tider opbremsende. Universet vil ikke vokse ud over alle grænser, men nærme sig asymptotisk til et statisk univers. Slutscene: Einsteins statiske univers.
- VII *Big Crunch universer* Big Bang start. Universet har siden starten udvidet sig. Denne ekspansion vil siden blive efterfulgt af en kontraktion. Slutscene: Det store knus.

Krumnings- og accelerationsforhold



På den viste figur er de to rette linjer $\Omega_\Lambda = -\Omega_0 + 1$ og $\Omega_\Lambda = \Omega_0/2$ indtegnet.

Ligning (5.1) $\Omega_\Lambda = -\Omega_0 + K_0 + 1$ viser, at universets nuværende krumning K_0 er nul på den første indtegnede linje, samt at K_0 er henholdsvis positiv/negativ over/under linjen.

Ligning (5.2) $\Omega_\Lambda = \Omega_0/2 + a_0$ viser, at universets nuværende acceleration a_0 er nul på den anden indtegnede linje, samt at a_0 er henholdsvis positiv/negativ over/under linjen.

Nogle citater

Howard Robertson i bogen *Relativistic Cosmology* (1933):

In giving this survey of cosmologies we are convinced that the underlying theory forms an integrated part of the theory of general relativity, and that although the choice of a particular model may for the present be influenced by the predilection of the individual, we can hope that the future will reveal additional evidence to test its validity and to lead to a satisfying solution.

Dennis Sciama i bogen *Modern Cosmology* (1971):

A rigid theory has not yet been discovered. For instance, general relativity, which is the best theory of space, time and gravitation that has so far been proposed, is, as we shall see, consistent with an infinite number of different possibilities, or models, for the history of the Universe. Needless to say, not more than one of these models can be correct, so that the theory permits possibilities that are not realized in Nature. In other words, it is too wide. We can put this in another way. In the absence of a theory anything can happen. If we introduce a weak theory too many things can still happen. A strong enough theory has not yet been discovered.

Manfred Eigen i bogen *The Physicist's Conception of Nature* (1973):

A theory has only the alternatives of being right or wrong. A model has the third possibility: it may be right, but irrelevant.

5.3 Beregning af et univers' alder

For de universer, som har en Big Bang start, er det meningsfyldt at tale om universets alder t_0 , som kan beregnes ved følgende formel

$$t_0 = \int_0^1 \left(\frac{x}{\Omega_0 + \Omega_\Lambda \cdot x^3 - K_0 \cdot x} \right)^{1/2} dx \quad (5.4)$$

Dette integral kan kun for meget specielle værdier af Ω_0 og Ω_Λ løses analytisk. Se rammen næste side. I almindelighed findes t_0 ved en numerisk integration (eksempelvis ved hjælp af en grafregner). Man behøver således ikke at kunne integralregning for at gøre brug af (5.4). Derimod giver nedenstående bevis for rigtigheden af formlen næppe megen mening for en integral-ignorant.

Bevis for formel (5.4)

Først omskrives Friedmann-ligningen (4.21):

$$\begin{aligned} (\mathfrak{R}')^2 &= \Omega_0/\mathfrak{R} + \Omega_\Lambda \cdot \mathfrak{R}^2 - K_0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\mathfrak{R}}{dt} = \sqrt{\Omega_0/\mathfrak{R} + \Omega_\Lambda \cdot \mathfrak{R}^2 - K_0} \quad \Leftrightarrow \\ dt &= \frac{d\mathfrak{R}}{\sqrt{\Omega_0/\mathfrak{R} + \Omega_\Lambda \cdot \mathfrak{R}^2 - K_0}} \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^t dt = \int_0^{\mathfrak{R}} \frac{d\mathfrak{R}}{\sqrt{\Omega_0/\mathfrak{R} + \Omega_\Lambda \cdot \mathfrak{R}^2 - K_0}} \quad \Leftrightarrow \\ t &= \int_0^{\mathfrak{R}} \frac{d\mathfrak{R}}{\sqrt{\Omega_0/\mathfrak{R} + \Omega_\Lambda \cdot \mathfrak{R}^2 - K_0}} = \int_0^{\mathfrak{R}} \frac{dx}{\sqrt{\Omega_0/x + \Omega_\Lambda \cdot x^2 - K_0}} \quad \Leftrightarrow \\ t &= \int_0^{\mathfrak{R}} \frac{\sqrt{x} \cdot dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{\Omega_0/x + \Omega_\Lambda \cdot x^2 - K_0}} = \int_0^{\mathfrak{R}} \frac{\sqrt{x} \cdot dx}{\sqrt{\Omega_0 + \Omega_\Lambda \cdot x^3 - K_0 \cdot x}} \quad \Leftrightarrow \\ t &= \int_0^{\mathfrak{R}} \left(\frac{x}{\Omega_0 + \Omega_\Lambda \cdot x^3 - K_0 \cdot x} \right)^{1/2} dx \quad (5.5) \end{aligned}$$

Indsættes heri $\mathfrak{R}(t_0) = 1$ fås det ønskede resultat: $t_0 = \int_0^1 \left(\frac{x}{\Omega_0 + \Omega_\Lambda \cdot x^3 - K_0 \cdot x} \right)^{1/2} dx$

Analytiske løsninger for t_0

Integralet i (5.4) kan løses analytisk i to tilfælde; nemlig for $K_0 = 0$ og for $\Omega_\Lambda = 0$.

Det er her praktisk at indføre størrelsen

$$a = \left| \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)} \right|$$

Tilfældet $K_0 = 0$

$$0 < \Omega_0 < 1: \quad t_0 = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{a+1} \cdot \sinh^{-1}(\sqrt{1/a})$$

$$\Omega_0 = 1: \quad t_0 = \frac{2}{3}$$

$$\Omega_0 > 1: \quad t_0 = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{a-1} \cdot \sin^{-1}(\sqrt{1/a})$$

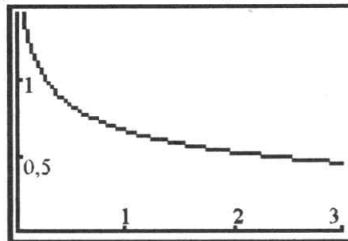
Tilfældet $\Omega_\Lambda = 0$

$$0 < \Omega_0 < 1: \quad t_0 = 1 + a - \frac{a}{2} \cdot \sqrt{a+1} \cdot (\ln(a/2 + 1 + \sqrt{a+1}) - \ln(a/2))$$

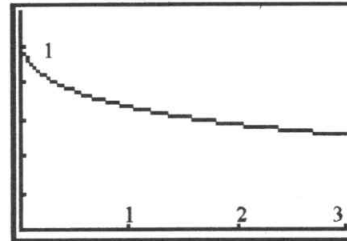
$$\Omega_0 = 1: \quad t_0 = \frac{2}{3}$$

$$\Omega_0 > 1: \quad t_0 = 1 - a + \frac{a}{2} \cdot \sqrt{a-1} \cdot \cos^{-1}(1 - 2/a)$$

t_0 som funktion af Ω_0 , når $K_0 = 0$



t_0 som funktion af Ω_0 , når $\Omega_\Lambda = 0$



I begge tilfælde ses universets alder t_0 at falde med stigende massetæthed Ω_0 . Dette kan forklares ved, at jo større massetætheden er, jo mere er de tiltrækkende gravitationskræfter i stand til at dæmpe universets ekspansion. Og jo større dæmpning, jo længere vil universet have været om at nå den størrelse, som vi iagttager i dag.

I tilfældet $\Omega_\Lambda = 0$ "starter" grafen i $t_0 = 1$. I tilfældet $K_0 = 0$ "starter" grafen i $t_0 = \infty$.

5.4 Løsning af Friedmann-ligningen

Friedmann-ligningen (4.20)

$$\mathcal{R}''(t) = -\frac{\Omega_0}{2 \cdot \mathcal{R}(t)^2} + \Omega_\Lambda \cdot \mathcal{R}(t)$$

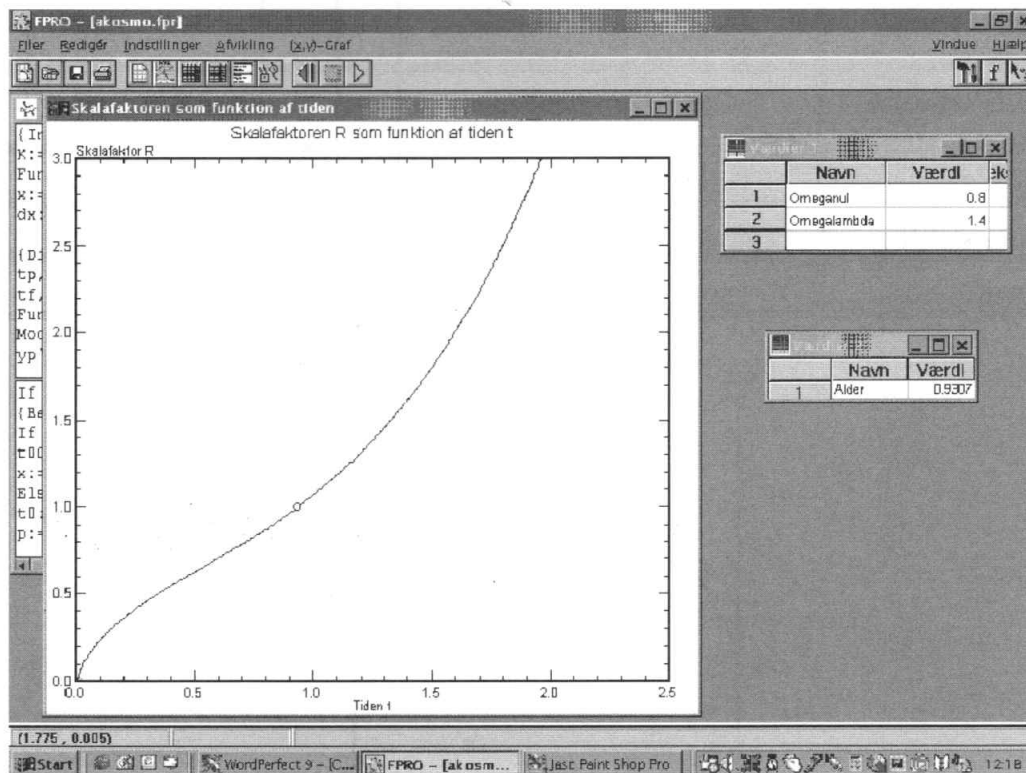
er en såkaldt 2. ordens differentilligning. Med startbetingelserne $\mathcal{R}(t_0) = 1$ og $\mathcal{R}'(t_0) = 1$, og t_0 givet ved (5.4), kan denne ligning ved hjælp af et passende IT-redskab løses numerisk for givne værdier af Ω_0 og Ω_Λ . (Oplagte IT-redskaber: Fpro, MathCad, TI-89, TI-92, ...).

I nogle få specialtilfælde kan $\mathcal{R}(t)$ udtrykkes ved standardfunktionerne. Se afsnit 5.5.

Sådan finder du for givne værdier af Ω_0 og Ω_Λ skalafaktoren $\mathcal{R}$ som funktion af tiden t :

- Vælg et passende IT-redskab.
- Beregn alderen t_0 for det pågældende univers ved at benytte formel (5.4).
- Løs numerisk differentilligningen $y'' = -\frac{1}{2} \cdot \Omega_0 / y^2 + \Omega_\Lambda \cdot y$; $y(t_0) = 1$ og $y'(t_0) = 1$.
Med dette menes: Tegn grafen af y som funktion af t .

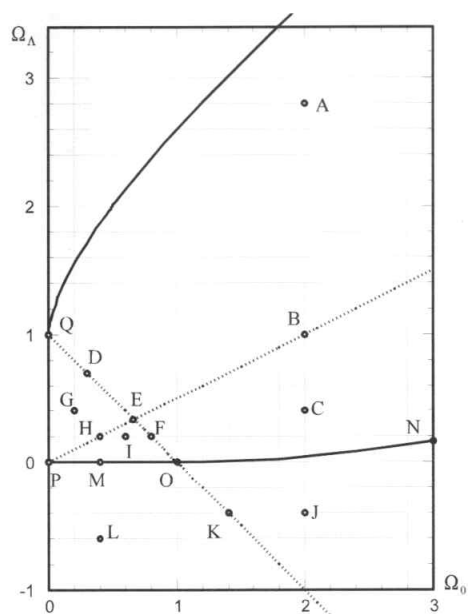
Nedenfor er vist, hvorledes resultatet af en sådan undersøgelse kunne se ud (her i computerprogrammet Fpro).



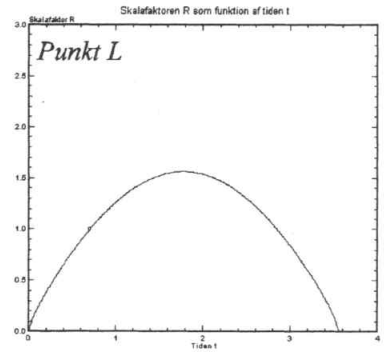
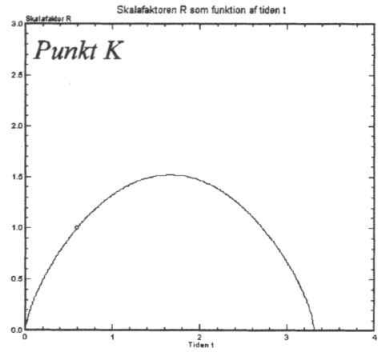
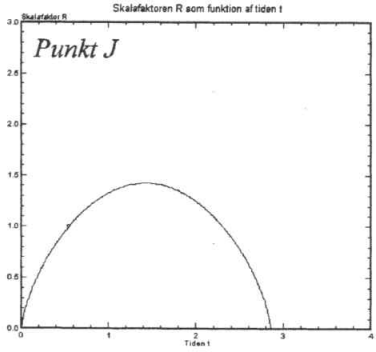
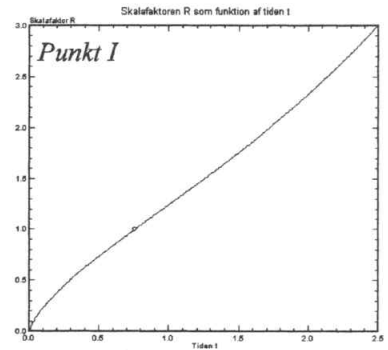
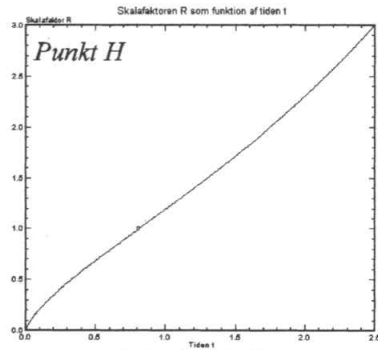
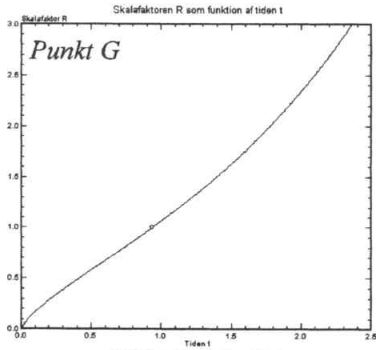
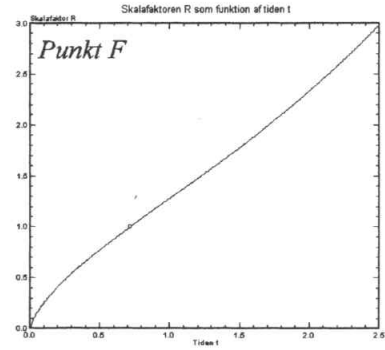
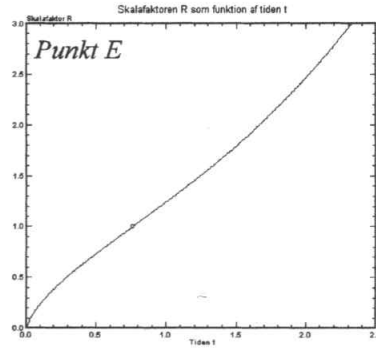
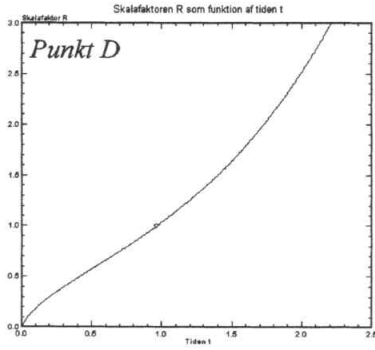
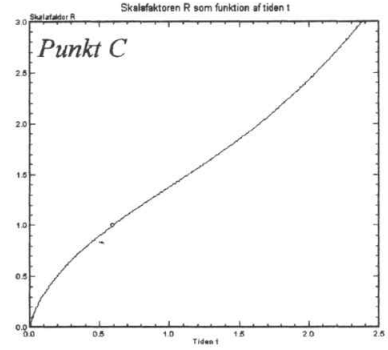
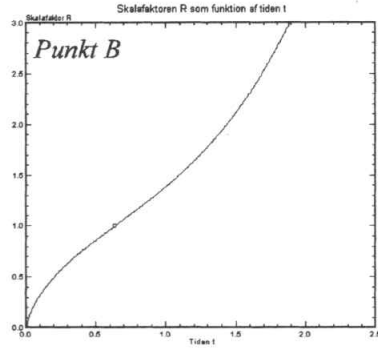
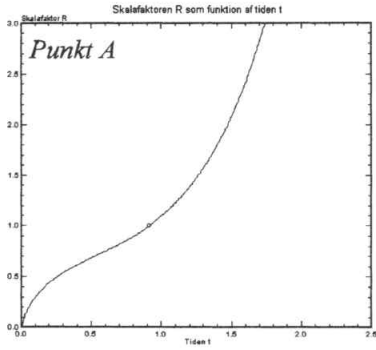
I skemaet næste side er eksempler på modeluniverser af hver af de relevante typer. På de følgende sider findes de tilsvarende grafer for $\mathcal{R}(t)$.

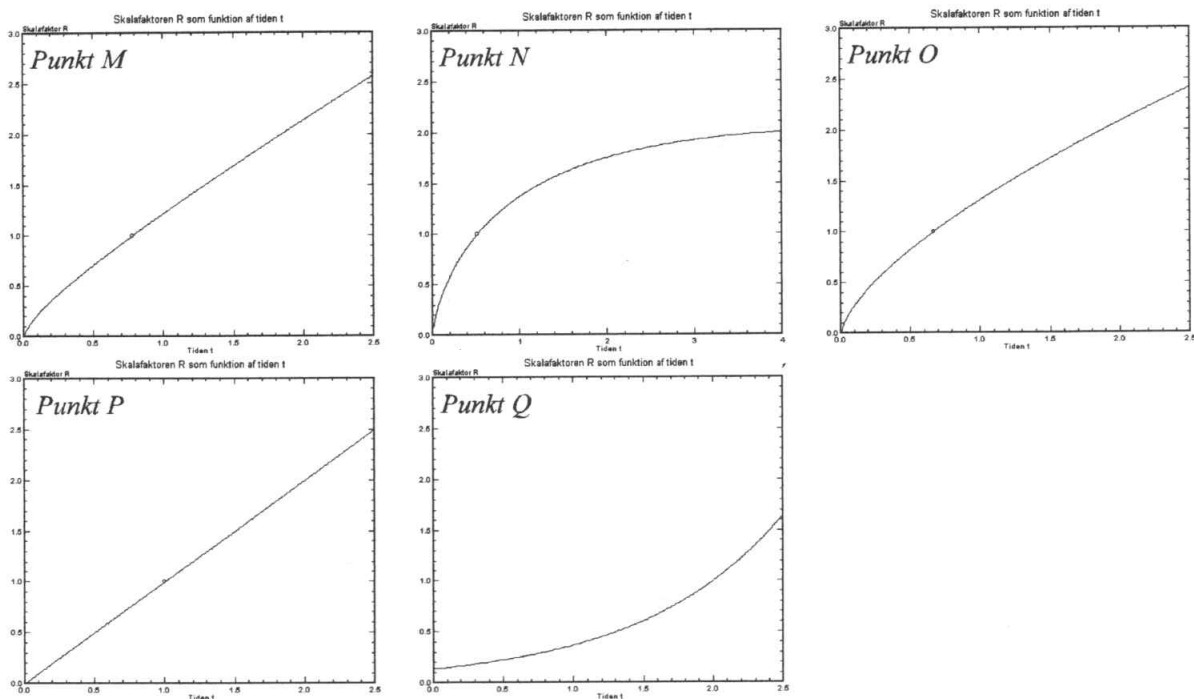
Oversigt over nogle karakteristiske Friedmann-universers egenskaber

	Krumning	Nuværende acceleration a_0	Eksempel				
			Pkt.	Ω_0	Ω_Λ	t_0	$r_0^{\max}$
Run-away universer	Lukket	Positiv	A	2,0	2,8	0,912	2,18
		Nul	B	2,0	1,0	0,637	1,70
		Negativ	C	2,0	0,4	0,594	1,62
	Fladt	Positiv	D	0,27	0,73	0,993	3,45
		Nul	E	2/3	1/3	0,760	2,38
		Negativ	F	0,8	0,2	0,717	2,20
	Åbent	Positiv	G	0,2	0,4	0,937	3,49
		Nul	H	0,4	0,2	0,810	2,74
		Negativ	I	0,6	0,2	0,757	2,42
Big-Crunch universer	Lukket	Negativ (eneste mulighed)	J	2,0	-0,4	0,550	1,53
	Fladt		K	1,4	-0,4	0,594	1,73
	Åbent		L	0,4	-0,6	0,706	2,47
Milne universer	Åbent (eneste mulighed)	Negativ (eneste mulighed)	M	0,4	0	0,779	2,66
Einstein universer	Lukket (eneste mulighed)	Negativ (eneste mulighed)	N	3,0	0,167659	0,520	1,36
Einstein-de Sitter model	Fladt	Negativ	O	1	0	0,667	2,00
Milne model	Åbent	Nul	P	0	0	1,000	∞
de Sitter model	Fladt	Positiv	Q	0	1	∞	-



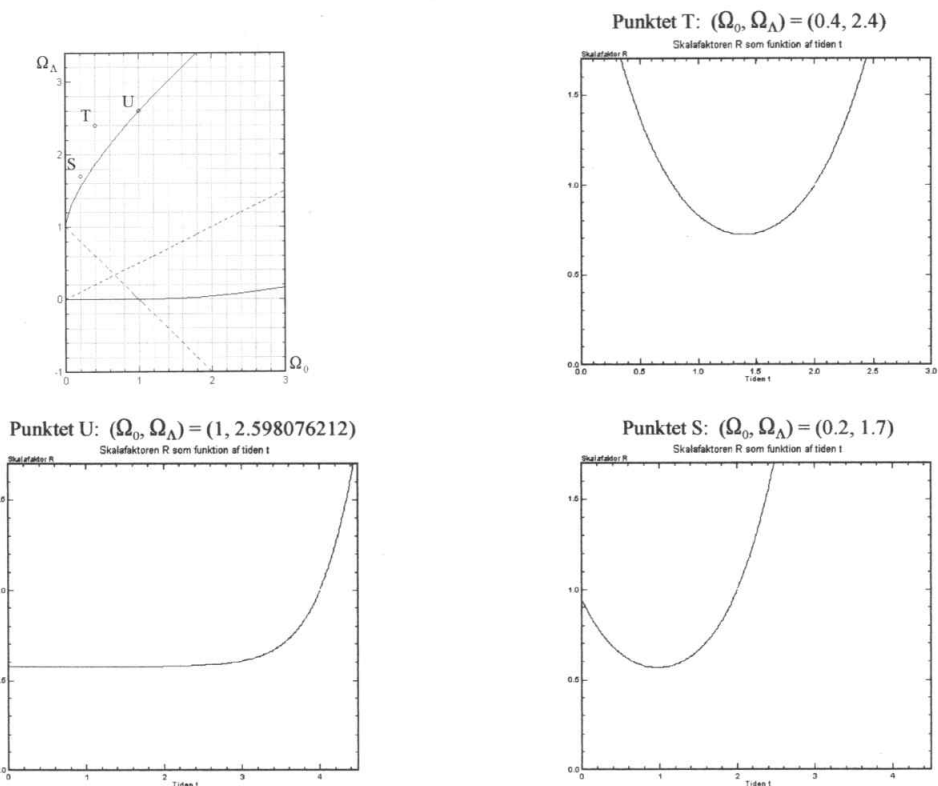
De følgende grafer viser skalafaktoren $\mathfrak{R}$ som funktion af t for de i skemaet valgte værdier af Ω_0 og Ω_Λ .





Eksempler på ikke-Big Bang løsninger

På figurene ses løsningskurverne til Friedmann-ligningen for nogle punkter på $(\Omega_0, \Omega_\Lambda)$ -kortet, hvor der ikke er mulighed for en Big Bang start. Det ses tydeligt, at skalafaktoren i de viste eksempler aldrig bliver nul.

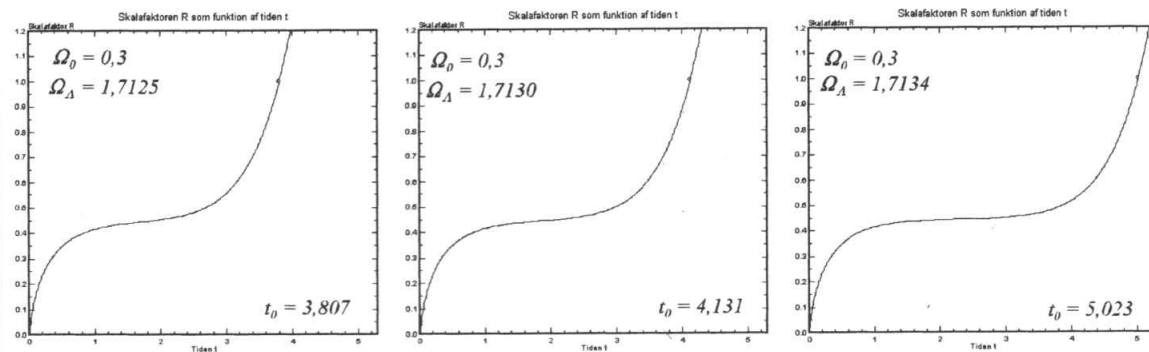


Lemaître-universer

Lige under den øverste (og lige over den nederste) grænsekurve på $(\Omega_0, \Omega_\Lambda)$ -kortet fås løsninger til Friedmann-ligningen, som har en karakteristisk "tøvende" periode. Der startes med et Big Bang, og efter et stykke tid bliver universet i lang tid tilnærmelsesvis stationært, for så slutteligt at "gå amok". Disse universer er opkaldt efter den belgiske kosmolog og teolog *Georges Lemaître*.

Tidligere var Lemaître-universerne populære, idet de ved den øvre grænsekurve giver store værdier for universets alder, og det havde man i høj grad brug for til at forklare, at Jordens alder med rimelig sikkerhed er 4,6 mia. år, mens Hubbletiden fx i 1950'erne blev vurderet til ca. 2 mia. år. Dette var et problem, fordi de fleste modeluniverser derved var yngre end både Jorden og stjernerne.

Eksempler på Lemaître-universer



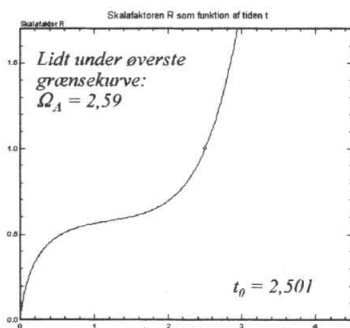
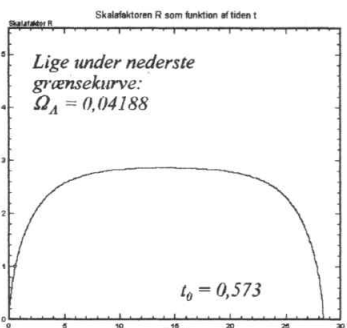
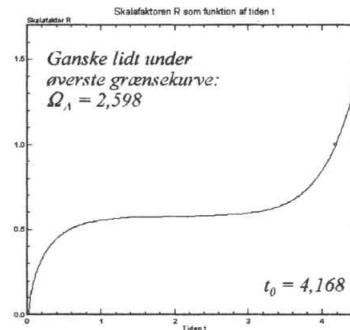
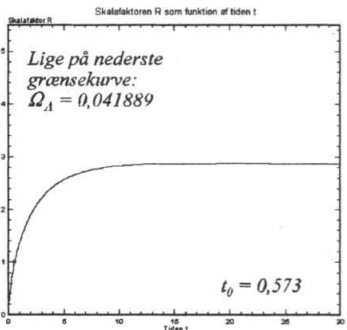
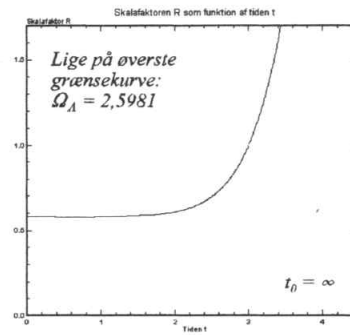
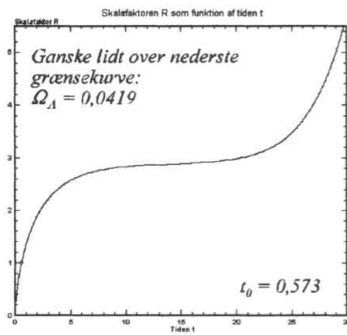
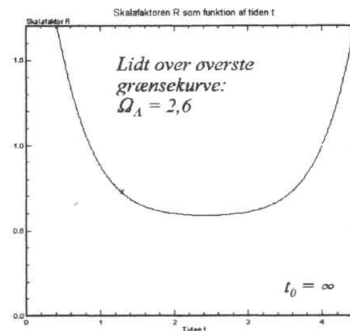
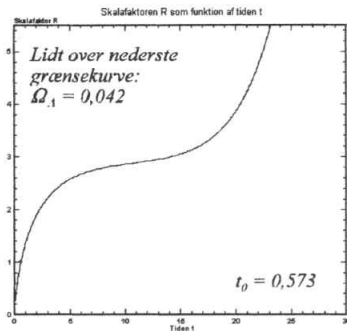
The Father of The Big Bang - De første seriøse Big Bang tanker

Georges Lemaître var den første kosmolog, som begyndte at tale om et tidligt univers i en helt ekstraordinær tilstand med høj (men ikke med uendelig høj) tæthed. Han døbte i 1931 denne tilstand *ur-atomet*, og han forestillede sig nærmest denne tilstand som en klump ekstremt sammenpresset stof bestående af radioaktivt materiale. Kosmologiens beskrivelse af Universet må ifølge Lemaître tage dette ur-atom som givet udgangspunkt. Ur-atomet eksisterer kun ganske kort tid, idet det eksploderer og herved bliver splittet op i mindre fragmenter. Disse fragmenter udsættes for nye eksplosioner samtidig med, at de radioaktive henfaldsprocesser foregår. På et tidspunkt er nedbrydningen af det oprindelige ur-atom så fremskreden, at de enkelte fragmenter er blevet på størrelse med de mindste atomer. Dette markerer begyndelsen på en ny fase: Universet går ind i en næsten stationær tilstand, hvor de tiltrækkende gravitationskræfter mellem fragmenterne så godt som helt standser Universets ekspansion. I denne fase beskrives Universet tilnærmelsesvis ved *Einsteins stationære model* fra 1917. Efter en vis tøven begynder Universet pludselig igen at ekspandere mærkbart. Ekspansionen bliver vildere og vildere, idet Universet slutteligt nærmer sig til *de Sitters eksponentielle modelunivers* fra 1917. Det skulle være i denne tredje fase af Universets livshistorie, at stjernerne og galakserne bliver dannet.



Ved grænserne

Nedenfor er vist, hvorledes selv en ganske lille forskel i Ω_Λ ved grænsekurverne på $(\Omega_0, \Omega_\Lambda)$ -kortet giver anledning til dramatisk forskellige univers typer. Ved den *nederste* grænsekurve er Ω_0 fastholdt på værdien $\Omega_0 = 2$. Ved den *øverste* grænsekurve er Ω_0 fastholdt på værdien $\Omega_0 = 1$.



Det ses, at ved nederste grænsekurve er udviklingen i den første tid ($t \lesssim 10$) nogenlunde ens. Derefter (nedefra og op): universet kolliderer, universet bliver stationært, universet bliver midlertidigt stationært, universet går amok.

Ved øverste grænsekurve stiger universets alder t_0 markant med stigende Ω_Λ . På selve grænsekurven (og over) er $t_0 = \infty$. Her har Universet ingen begyndelse; her er der intet Big Bang.

5.5 Analytiske udtryk for skalafaktoren

Friedmann-ligningen kan løses analytisk i tre specialtilfælde: $K_0 = 0$, $\Omega_0 = 0$ og $\Omega_\Lambda = 0$.

Tilfældet $\Omega_0 = 0$, altså de *tomme universer*, er medtaget for fuldstændighedens skyld.

Ligesom ved de analytiske udtryk for Universets alder t_0 (side 68) indføres også her størrelsen

$$a \equiv \left| \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)} \right|$$

Analytiske udtryk for $\mathfrak{R}$ i tilfældet $K_0 = 0$

$$0 < \Omega_0 < 1: \mathfrak{R}(t) = (a/4)^{1/3} \cdot (e^{b \cdot t} - e^{-b \cdot t})^{2/3}, \text{ hvor } b \equiv 3/2 \cdot \sqrt{1/(a+1)} \quad (5.6)$$

$$\Omega_0 = 1: \mathfrak{R}(t) = (3/2 \cdot t)^{2/3} \quad (\text{Einstein/de Sitter-modellen}) \quad (5.7)$$

$$\Omega_0 > 1: \mathfrak{R}(t) = a^{1/3} \cdot \sin(3/2 \cdot \sqrt{1/(a-1)} \cdot t)^{2/3} \quad (5.8)$$

For $0 < \Omega_0 < 1$ fås et *run-away univers*. År2003-universet fremkommer for $\Omega_0 = 0,27$ svarende til $a = 0,3699$. Kosmologernes bedste bud (forår 2003) på Universets udvikling er følgende: $\mathfrak{R}(t) = 0,4522 \cdot (e^{1,2816 \cdot t} - e^{-1,2816 \cdot t})^{2/3}$.

For $\Omega_0 = 1$ fås det allerede omtalte *Einstein/de Sitter univers*.

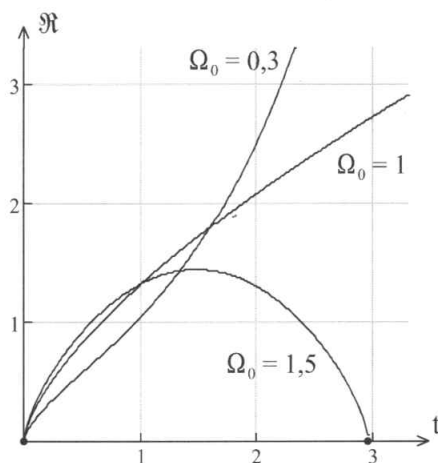
For $\Omega_0 > 1$ fås et *Big Crunch univers*. Dødstidspunktet t_{slut} for sådanne universer kan findes ved at løse ligningen $\mathfrak{R}(t) = 0$:

$$a^{1/3} \cdot \sin(3/2 \cdot \sqrt{1/(a-1)} \cdot t_{\text{slut}})^{2/3} = 0 \Leftrightarrow \sin(3/2 \cdot \sqrt{1/(a-1)} \cdot t_{\text{slut}}) = 0 \Leftrightarrow$$

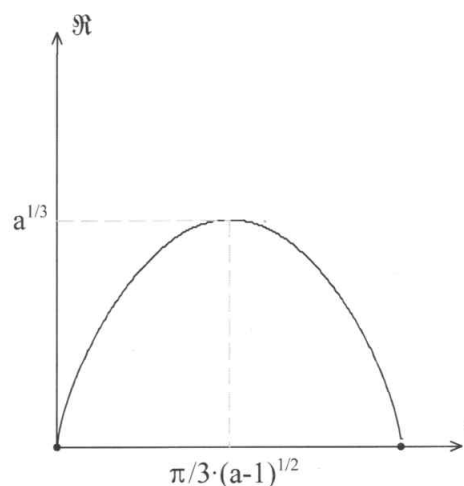
$$3/2 \cdot \sqrt{1/(a-1)} \cdot t_{\text{slut}} = \pi \Leftrightarrow t_{\text{slut}} = 2\pi/3 \cdot \sqrt{a-1} \Leftrightarrow t_{\text{slut}} = 2\pi/3 \cdot \sqrt{1/(\Omega_0 - 1)}$$

Den maksimale værdi for $\mathfrak{R}$ må opnås, når $t = t_{\text{slut}}/2$: $\mathfrak{R}_{\text{max}} = a^{1/3} = (\Omega_0/(\Omega_0-1))^{1/3}$.

Skalafaktoren for tre forskellige
massetætheder i tilfældet $K_0 = 0$



Sinus-universer ($\Omega_0 > 1$)



Analytiske udtryk for $\mathfrak{R}$ i tilfældet $\Omega_0 = 0$ (de tomme universer)

$$\Omega_\Lambda < 0: \quad \mathfrak{R}(t) = \sqrt{1 - 1/\Omega_\Lambda} \cdot \sin(\sqrt{|\Omega_\Lambda|} \cdot t) \quad (5.9)$$

$$\Omega_\Lambda = 0: \quad \mathfrak{R}(t) = t \quad (\text{Milne-modellen}) \quad (5.10)$$

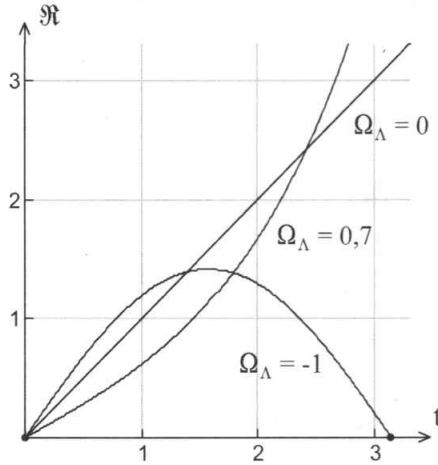
$$0 < \Omega_\Lambda < 1: \quad \mathfrak{R}(t) = \sqrt{1/\Omega_\Lambda - 1} \cdot (e^{\sqrt{\Omega_\Lambda} \cdot t} - e^{-\sqrt{\Omega_\Lambda} \cdot t})/2 \quad (5.11)$$

$$\Omega_\Lambda = 1: \quad \mathfrak{R}(t) = e^{t-t_0} \quad (\text{de Sitter-modellen}) \quad (5.12)$$

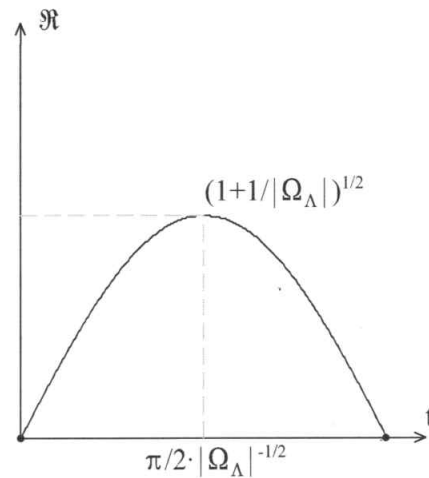
$$\Omega_\Lambda > 1: \quad \mathfrak{R}(t) = (1 + 1/\Omega_\Lambda)/2 \cdot e^{\sqrt{\Omega_\Lambda} \cdot (t-t_0)} + (1 - 1/\Omega_\Lambda)/2 \cdot e^{-\sqrt{\Omega_\Lambda} \cdot (t-t_0)} \quad (5.13)$$

I tilfældene $\Omega_\Lambda \geq 1$ er der ikke mulighed for en Big Bang start. Disse modeluniverser har således ikke nogen veldefineret alder, og t_0 kan følgelig vælges efter behag.

Skalafaktoren for tre forskellige værdier af vacuumtæthedsparmetren i tilfældet $\Omega_0 = 0$



De tomme sinus-universer ($\Omega_\Lambda < 0$)



Analytiske udtryk for $\mathfrak{R}$ i tilfældet $\Omega_\Lambda = 0$

$$0 < \Omega_0 < 1: \quad t = \sqrt{1+a} \cdot \sqrt{\mathfrak{R}^2 + a \cdot \mathfrak{R}} - a/2 \cdot \sqrt{1+a} \cdot \ln(1 + 2 \cdot \mathfrak{R}/a + 2 \cdot \sqrt{\mathfrak{R}^2/a^2 + \mathfrak{R}/a}) \quad (5.14)$$

$$\Omega_0 = 1: \quad \mathfrak{R}(t) = (3/2 \cdot t)^{2/3} \quad (\text{Einstein/de Sitter-modellen}) \quad (5.15)$$

$$\Omega_0 > 1: \quad t = \sqrt{a-1} \cdot (a/2 \cdot \cos^{-1}(1 - 2 \cdot \mathfrak{R}/a) - \sqrt{a \cdot \mathfrak{R} - \mathfrak{R}^2}) \quad (5.16)$$

For $\Omega_0 < 1$ fås såkaldte *Milne-universer*; det vil sige evigt ekspanderende, men opbremsende universer, som sluttelig nærmer sig til Milne-modellen, hvor galaksernes hastigheder er konstante. Udtrykket (5.14) kan ikke "vendes rundt", så der fremkommer et simpelt udtryk for

$\mathfrak{R}$ som funktion af t .

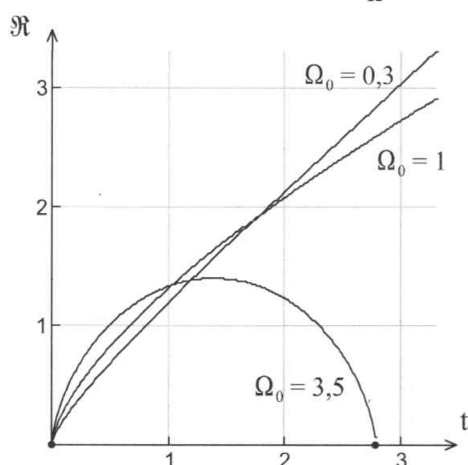
For $\Omega_0 = 1$ fås det allerede omtalte *Einstein/de Sitter-univers*.

For $\Omega_0 > 1$ fås et *Big Crunch univers*. Kurveformen er i det væsentlige en *cykloidebue* *).

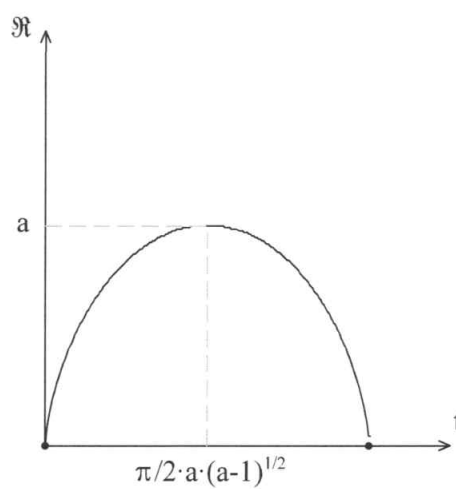
Udtrykket (5.16) for t som funktion af $\mathfrak{R}$ kan omskrives som følger:

$$\mathfrak{R}(t) = \frac{a}{2} \cdot (1 - \cos(v(t))), \text{ hvor } v(t) = \text{solve}(v - \sin(v) = \frac{2 \cdot t}{(1-a)^{1/2} \cdot a}, v)$$

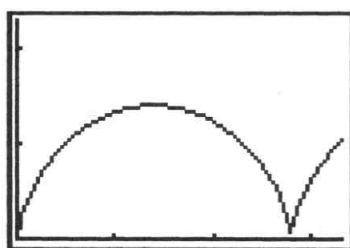
Skalafaktoren for tre forskellige
massetætheder i tilfældet $\Omega_\Lambda = 0$



Cykloide-universer ($\Omega_0 > 1$)



Cykloide på grafregner



```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=solve(V-sin(
V)-2*X/(sqrt(A-1)*A
),V,0)
\Y2=A/2*(1-cos(Y
1))
\Y3=
\Y4=
```

*) Punkterne $(t/(a-1)^{1/2}, \mathfrak{R}(t))$ udgør præcis en cykloidebue: Banekurven for et fast punkt på en cirkel med radius $a/2$, der ruller hen ad en vandret akse (her $t/(a-1)^{1/2}$ -aksen).

Kapitel 6

Beregning af afstande. Horisonter

6.1 Fra rødforskydning til afstand

I Kapitel 2 blev det beskrevet, hvordan man på forholdsvis enkel vis kan måle en galakses rødforskydning z . Når denne størrelse først er bestemt, så kan galaksens nuværende afstand i et givet modelunivers beregnes (formlen bevises senere):

$$r_0 = \int_1^{1+z} \frac{1}{\sqrt{\Omega_0 \cdot x^3 + \Omega_\Lambda - K_0 \cdot x^2}} dx \quad (6.1)$$

Når du har bestemt dig for et modelunivers, så kan integralet i (6.1) for et givet z nemt beregnes fx ved hjælp af en grafregner. At bestemme sig for et modelunivers vil jo sige, at vælge værdier for Ω_0 og Ω_Λ . (Husk, at $K_0 = \Omega_0 + \Omega_\Lambda - 1$). Integralet i (6.1) kan udregnes analytisk for $\Omega_\Lambda = 0$. Det vil sige for modeluniverser, der ligger på førsteaksen på $(\Omega_0, \Omega_\Lambda)$ -kortet. Med dette menes, at man for $\Omega_\Lambda = 0$ kan udtrykke r_0 som funktion af z ved hjælp af standardfunktioner. Se rammen.

Analytiske udtryk for afstanden r_0 som funktion af z i tilfældet $\Omega_\Lambda = 0$

$$\text{For } \Omega_0 < 1 : r_0 = \frac{2}{\sqrt{1-\Omega_0}} \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{\Omega_0 \cdot z + 1} - \sqrt{1-\Omega_0}}{\sqrt{z+1} \cdot (1 - \sqrt{1-\Omega_0})}\right)$$

$$\text{For } \Omega_0 = 1 : r_0 = -2(1+z)^{-1/2} + 2 \quad \text{Einstein/de Sitter}$$

$$\text{For } \Omega_0 > 1 : r_0 = \frac{2}{\sqrt{\Omega_0-1}} \cdot \left(\tan^{-1} \sqrt{\frac{\Omega_0 \cdot z + 1}{\Omega_0 - 1}} - \tan^{-1} \sqrt{\frac{1}{\Omega_0 - 1}} \right)$$

Selvom man ikke i almindelighed for vilkårlige værdier af Ω_0 og Ω_Λ kan udtrykke afstanden r_0 som funktion af z analytisk, så kan det, som vi nu skal se, lade sig gøre, hvis man kun betragter små rødforskydninger.

Afstandsformlen (6.1) for $|z| \ll 1$:

$$r_0 = z - 0,5(1 - a_0) \cdot z^2 \quad |z| \ll 1 \quad (6.2)$$

hvor a_0 er modeluniversets accelerationsparameter; altså $a_0 = -\Omega_0/2 + \Omega_\Lambda$.

Bevis

Først skiftes integrationsvariabel i (6.1) ved at indføre y givet ved: $y = x-1 \Leftrightarrow x = y+1$.

$$r_0 = \int_1^{1+z} \frac{1}{\sqrt{\Omega_0 \cdot x^3 + \Omega_\Lambda - K_0 \cdot x^2}} dx = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{\Omega_0 \cdot (1+y)^3 + \Omega_\Lambda - K_0 \cdot (1+y)^2}} dy \quad (6.3)$$

Så omskrives udtrykket under kvadratrodstegnet:

$$\begin{aligned} & \Omega_0 \cdot (1+y)^3 + \Omega_\Lambda - K_0 \cdot (1+y)^2 \\ & \approx \Omega_0 \cdot (1+3 \cdot y) + \Omega_\Lambda - K_0 \cdot (1+2 \cdot y) \quad \text{Der gælder følgende tilnærmelsesformel} \\ & = \Omega_0 + \Omega_0 \cdot 3y + \Omega_\Lambda - K_0 - K_0 \cdot 2y \quad \text{for alle små tal } \epsilon \approx 0: \\ & \quad (1 + \epsilon)^n \approx 1 + n \cdot \epsilon \text{ for } |\epsilon| \ll 1 \\ & = \Omega_0 + \Omega_\Lambda - K_0 + 2(3/2 \Omega_0 - K_0) \cdot y \\ & = 1 + 2(3/2 \Omega_0 - \Omega_0 - \Omega_\Lambda + 1) \cdot y \quad \text{Indsætter } K_0 = \Omega_0 + \Omega_\Lambda - 1 \\ & = 1 + 2(\Omega_0/2 - \Omega_\Lambda + 1) \cdot y \quad \text{Indsætter } a_0 = -\Omega_0/2 + \Omega_\Lambda \\ & = 1 + 2(1 - a_0) \cdot y. \end{aligned}$$

Herefter fås for udtrykket under integraltegnet:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\Omega_0 \cdot (1+y)^3 + \Omega_\Lambda - K_0 \cdot (1+y)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + 2(1 - a_0) \cdot y}} = (1 + 2(1 - a_0) \cdot y)^{-0,5} \\ & \approx 1 - (1 - a_0) \cdot y. \quad (\text{Igen ved brug af tilnærmelsen } (1 + \epsilon)^n \approx 1 + n \cdot \epsilon \text{ for } |\epsilon| \ll 1). \end{aligned}$$

Endelig indsættes i (6.3):

$$\begin{aligned} r_0 &= \int_0^z \frac{1}{\sqrt{\Omega_0 \cdot (1+y)^3 + \Omega_\Lambda - K_0 \cdot (1+y)^2}} dy \approx \int_0^z (1 - (1 - a_0) \cdot y) dy = [y - 0,5(1 - a_0) \cdot y^2]_0^z \\ &= z - 0,5(1 - a_0) \cdot z^2 \Leftrightarrow r_0 = z - 0,5(1 - a_0) \cdot z^2 \quad |z| \ll 1. \quad \text{Bevis slut.} \end{aligned}$$

Metode til måling af H_0 og a_0

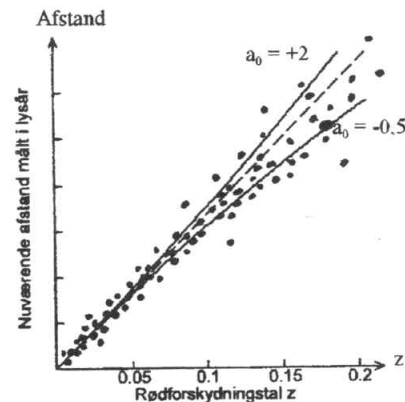
Formel (6.2) giver mulighed for meget direkte ud fra eksperimentelle data at bestemme værdier både for Hubble-parametren H_0 og for universets nuværende accelerationsparameter a_0 .

Metode: Mål uafhængigt af hinanden sammenhørende værdier for afstand og rødforskydning z for en lang række galakser, og afsæt resultaterne i et koordinatsystem som det viste.

Eftersom r_0 er galakseafstande målt i hubblelængder, må $L_H \cdot r_0$ være de tilsvarende afstande målt i fx meter eller i lysår. Ligning (6.2) ganges derfor igennem med hubblelængden L_H :

$$r_0 \cdot L_H = z \cdot L_H - 0,5 \cdot L_H \cdot (1 - a_0) \cdot z^2.$$

Heraf ses, at for små rødforskydninger er grafen en ret linje med hældning L_H . (Dette resultat er iøvrigt allerede omtalt i Kapitel 2 side 30). Ved at bestemme hældningen af det første lineære stykke af grafen, kan der følgelig opnås en værdi for L_H og dermed også for $H_0 = c/L_H$.

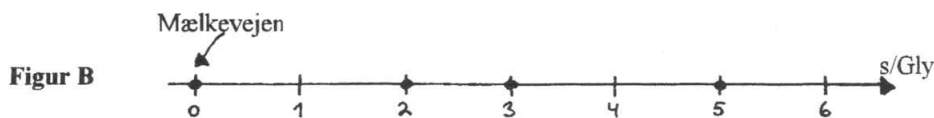
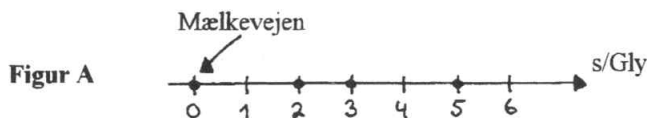


For større og større værdier af z kommer der en afvigelse fra den lineære sammenhæng. Denne afvigelse kan udnyttes til at fastlægge en værdi for a_0 . (Bestem det 2. grads polynomium af formen $A \cdot z^2 + B \cdot z$, som bedst tilnærmer de eksperimentelle data. Så er $B = L_H$, og $A = -0,5 \cdot (1 - a_0) \cdot L_H$).

6.2 Fotoner på vej

I dette afsnit vil vi gøre rede for, hvilke lovmæssigheder, der gælder for fotoners bevægelser i det ekspanderende rum. Hertil benyttes såkaldte *medløberkoordinater* (= comoving coordinates). Betragt galakserne i en bestemt retning. Hver af galakserne tildeles *faste* koordinater s ; nemlig deres *nuværende* afstande r_0 . Disse såkaldte *medløberkoordinater* ændrer sig *ikke* i tiden, selvom afstandene til galakserne selvfølgelig gør det.

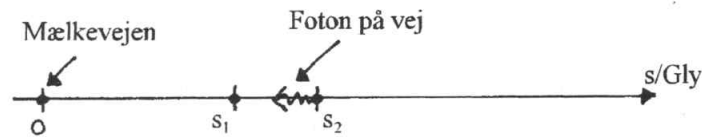
Afstanden mellem to galakser med medløber-koordinater henholdsvis s_1 og s_2 må til et vilkårligt tidspunkt t være givet ved $|s_2 - s_1| \cdot \mathfrak{R}(t)$.



På Figur A ses foruden Mælkevejen tre galakser med medløberkoordinaterne henholdsvis 2, 3 og 5. På Figur B ses de samme tre galaksehobe, efter at rummet er blevet dobbelt så stort. Medløberkoordinaterne er stadig 2, 3 og 5.

Hidtil har vi kun set på bevægelser, hvor objekter bare følger med i rummets almindelige ekspansion (altså hvor objekternes medløberkoordinater er konstante). Fotoner derimod bevæger sig *gennem* rummet, så fotoners medløberkoordinater er *ikke* konstante! Fotoners fart gennem rummet er c . En foton, der passerer en galakse, vil målt i forhold til denne galakse *altid* have farten c . Derimod vil fotonens fart på grund af rummets ekspansion *ikke* være c målt i forhold til en fjernere galakse!!

Betragt en foton, der er på vej mod os. Den bevæger sig fra s_2 til det nærliggende punkt s_1 i løbet af tidsrummet dt . Den tilhørende medløberkoordinat tilvækst: $ds = s_{\text{slut}} - s_{\text{start}} = s_1 - s_2$.



Den strækning, som fotonen tilbagelægger, er $(s_2 - s_1) \cdot \mathfrak{R}(t) = -ds \cdot \mathfrak{R}(t)$. Eftersom en iagttager ved de to galakser vil bestemme fotonens fart til c , fås:

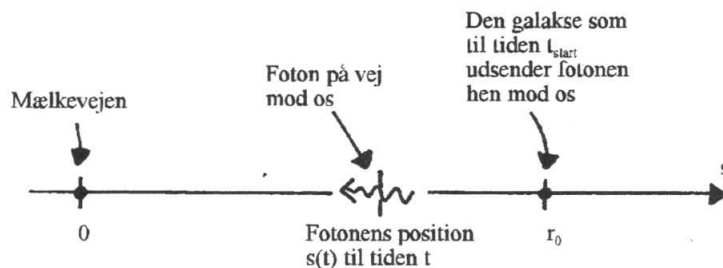
$$c = \frac{\text{tilbagelagt strækning}}{\text{tid}} = \frac{(s_2 - s_1) \cdot \mathfrak{R}(t)}{dt} = \frac{-(s_1 - s_2) \cdot \mathfrak{R}(t)}{dt} = \frac{-ds \cdot \mathfrak{R}(t)}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{-c}{\mathfrak{R}(t)}$$

I kosmologiske enheder, hvor $c = 1$, bliver dette til:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{-1}{\mathfrak{R}(t)} \quad (6.4)$$

Dette er den differentiaalligning, som beskriver fotoners vej mod os udtrykt i rummets medløberkoordinater. Ligningen omskrives:



$$\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{\mathfrak{R}(t)} \Leftrightarrow \int_{r_0}^{s(t)} ds = - \int_{t_{\text{start}}}^t \frac{dt}{\mathfrak{R}(t)} \Leftrightarrow s(t) - r_0 = - \int_{t_{\text{start}}}^t \frac{dt}{\mathfrak{R}(t)} \Leftrightarrow$$

$$s(t) = r_0 - \int_{t_{\text{start}}}^t \frac{dt}{\mathfrak{R}(t)} \quad (6.5)$$

Ved indsættelse i dette udtryk kan en foton's vej gennem rummet kortlægges.

6.3 Bevis for afstandsformlen

Hvis man i (6.5) specielt betragter den situation, hvor vi i dag modtager den udsendte foton, så er $t = t_0$, $s(t) = 0$ og $t_{\text{start}} = t_e$ (Se eventuelt afsnit 2.6).

Dermed fås:

$$0 = r_0 - \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{\mathfrak{R}(t)} \quad \Leftrightarrow \quad r_0 = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{\mathfrak{R}(t)} \quad (6.6)$$

Dette er præcis det tidligere nævnte udtryk (2.8) til beregning af afstande r_0 . Med (6.6) til rådighed kan rigtigheden af den tidligere påståede afstandsformel (6.1) nu eftervises. Først omskrives Friedmann-ligningen (4.21) $(\mathfrak{R}')^2 = \Omega_0/\mathfrak{R} + \Omega_\Lambda \cdot \mathfrak{R}^2 - K_0$ som følger

$$\begin{aligned} (\mathfrak{R}')^2 &= \Omega_0/\mathfrak{R} + \Omega_\Lambda \cdot \mathfrak{R}^2 - K_0 \quad \Leftrightarrow \quad (\mathfrak{R}'/\mathfrak{R})^2 = \Omega_0/\mathfrak{R}^3 + \Omega_\Lambda - K_0/\mathfrak{R}^2 \quad \Leftrightarrow \\ (\mathfrak{R}'/\mathfrak{R})^2 &= \Omega_0 \cdot x^3 + \Omega_\Lambda - K_0 \cdot x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{R}'/\mathfrak{R} = \sqrt{\Omega_0 \cdot x^3 + \Omega_\Lambda - K_0 \cdot x^2} \quad , \end{aligned} \quad (6.7)$$

hvor jeg har indført hjælpefunktionen $x(t)$:

$$x(t) \equiv 1/\mathfrak{R}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{R} = 1/x$$

Differentiation af $x(t)$ med hensyn til t giver:

$$\frac{dx}{dt} = - \frac{d}{dt} \frac{1}{\mathfrak{R}(t)} = - \frac{\mathfrak{R}'}{\mathfrak{R}^2} \quad \Leftrightarrow \quad dt = - \frac{\mathfrak{R}^2}{\mathfrak{R}'} dx \quad (6.8)$$

Ligning (6.7) og (6.8) giver nu mulighed for at omskrive integralet i (6.6):

$$\frac{dt}{\mathfrak{R}(t)} = \frac{-\mathfrak{R}^2/\mathfrak{R}'}{\mathfrak{R}} \cdot dx = \frac{-\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}'} \cdot dx = \frac{-1}{\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}} \cdot dx = \frac{-dx}{\sqrt{\Omega_0 \cdot x^3 + \Omega_\Lambda - K_0 \cdot x^2}}$$

eller

$$r_0 = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{\mathfrak{R}(t)} = \int_{t_e}^{t_0} \frac{-dx}{\sqrt{\Omega_0 \cdot x^3 + \Omega_\Lambda - K_0 \cdot x^2}} \quad .$$

Når $t = t_0$ er $x = 1$, idet $x(t_0) = 1/\mathfrak{R}(t_0) = 1/1 = 1$.

Når $t = t_e$ er $x = 1+z$, idet $x(t_e) = 1/\mathfrak{R}(t_e) = 1+z$ ifølge ligning (2.5).

Herefter fås det ønskede udtryk (6.1) for afstanden r_0 :

$$r_0 = \int_{t=t_e}^{t=t_0} \frac{-dx}{\sqrt{\Omega_0 \cdot x^3 + \dots}} = \int_{x=1+z}^{x=1} \frac{-dx}{\sqrt{\Omega_0 \cdot x^3 + \dots}} = \int_1^{1+z} \frac{1}{\sqrt{\Omega_0 \cdot x^3 + \Omega_\Lambda - K_0 \cdot x^2}} dx .$$

Bevis slut.

6.4 Horisonter

Når vi kigger ud i Universet, så kigger vi som tidligere nævnt også tilbage i tiden. Jo længere væk en galakse er, jo længere tilbage i tiden ser vi. Det er således også klart, at jo længere væk en galakse befinder sig, jo længere tid har de i dag modtagne fotoner fra galaksen været undervejs. På grund af Universets endelige levetid har der for meget fjerne galaksers vedkommende ikke været tid nok til, at nogen som helst fotoner fra netop dem er nået frem til os. Dette betyder, at der for en vilkårlig iagttagere i Universet findes en "lokal bobbel", der afgrænser det lokale, *principielt* observerbare univers. Lidt på samme måde som to iagttagere på to forskellige skibe langt ude på Atlanten vil have hver deres observerbare verden afgrænset af hver deres horisont.

Vi er i centrum for vores egen horisontflade i rummet. Denne flade er en tænkt kugleskal indenfor hvilken alle de objekter, som vi i princippet på nuværende tidspunkt kan se, ligger. Udenfor kuglefladen ligger alle de galakser, som vi ikke har en chance for at se. Den omtalte grænseflade kaldes vores *partikelhorisont*, og afstanden ud til den betegnes $r_0^{\max}$. Ifølge Det kosmologiske princip er $r_0^{\max}$ ens for alle iagttagere. Hvis to iagttagere er tilstrækkeligt langt væk fra hinanden, kan de ikke observere ét eneste *fælles* objekt. Dette vil nemlig være tilfældet, hvis deres lokale observerbare universer ikke overlapper hinanden; altså hvis deres indbyrdes afstand er større end $2 \cdot r_0^{\max}$.

Af (6.1) $r_0 = \int_1^{1+z} (\Omega_0 \cdot x^3 + \Omega_\Lambda - K_0 \cdot x^2)^{-0.5} dx$ ses, at jo større rødforskydningen z er, jo

større er r_0 , så den størst mulige afstand må opnås, når $z = \infty$:

$$r_0^{\max} = \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\Omega_0 \cdot x^3 + \Omega_\Lambda - K_0 \cdot x^2}} dx \quad (6.9)$$

I skemaet side 70 er $r_0^{\max}$ beregnet for en række modeluniverser. Det ses, at $r_0^{\max}$ typisk er af størrelsen $1-3 L_H = 14-40$ Gly. For Einstein/de sitter-modellen fås eksempelvis $r_0^{\max} = 2,00$ og for År2003-modellen fås $r_0^{\max} = 3,30$. Et *models*kift fra Einstein/de Sitter til År2003 betyder således, at det principielt tilgængelige univers bliver hele 73 % større ($3,45/2,00 = 1,73$).

Ved i det generelle udtryk (6.6) at sætte $t_e = 0$, fås et andet udtryk for $r_0^{\max}$:

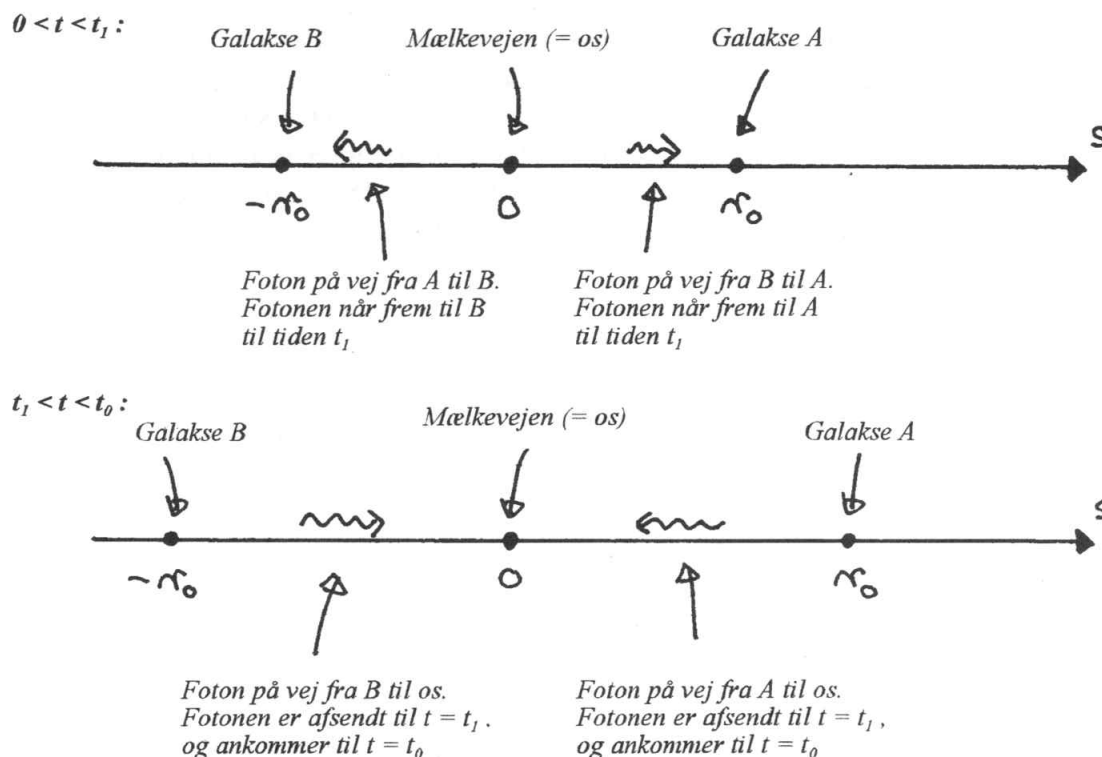
$$r_0^{\max} = \int_0^{t_0} \frac{1}{\mathfrak{R}(t)} dt \quad (6.10)$$

For at drage nytte af denne formel skal man kende $\mathfrak{R}(t)$, så i almindelighed er (6.9) at foretrække.

6.5 Horisontproblemet

Betragt to galakser A og B i samme afstand r_0 fra os, men i diametralt modsatte retninger. I selve Big-Bang øjeblikket ($t=0$) afsendes fra B et lyssignal henimod A (ligesom der fra A afsendes et lyssignal henimod B). Ses situationen fra A, så er (den nuværende) afstand til B lig $2 \cdot r_0$. Kaldes det tidspunkt, hvor A modtager lyssignalet fra B for t_1 , fås ifølge (6.5)

$$2 \cdot r_0 = \int_0^{t_1} \frac{1}{\mathfrak{R}(t)} dt.$$



Umiddelbart efter at A har modtaget lyssignalet, afsender A et lyssignal mod os, og vi tænker os, at vi modtager dette lyssignal i dag:

$$r_0 = \int_{t_1}^{t_0} \frac{1}{\mathfrak{R}(t)} dt \quad (\text{eftersom den nuværende afstand til os bedømt fra A er } r_0).$$

Følgelig gælder:

$$r_0^{\max} = \int_0^{t_0} \frac{1}{\mathfrak{R}(t)} dt = \int_0^{t_1} \frac{1}{\mathfrak{R}(t)} dt + \int_{t_1}^{t_0} \frac{1}{\mathfrak{R}(t)} dt = 2 \cdot r_0 + r_0 = 3 \cdot r_0 \quad \Leftrightarrow \quad r_0 = r_0^{\max}/3.$$

Hvis $r_0 > r_0^{\max}/3$, så er galakserne A og B for langt fra hinanden til, at de omtalte lyssignaler kan nå frem til tiden. Det betyder, at selv om vi i dag kan iagttage både A og B, så er der ingen mulighed for, at A og B kan kende til hinandens eksistens !!

Partikelhorisonten $r_0^{\max}$ er således ikke kun vigtig, fordi den angiver den maksimumafstand, som en iagttager principielt kan se ud i rummet, men også fordi $2/3 \cdot r_0^{\max}$ angiver den afstand, som to for os observerbare galakser i dag højst må være fra hinanden, hvis de i fortiden skal have haft en chance for at kommunikere eller påvirke hinanden indbyrdes.

Denne indsigt giver anledning til et alvorligt problem, der går under navnet *horisontproblemet*. "Hvordan kan rummet omkring os være så isotropt (= ens i alle retninger), som det rent faktisk er, når objekter i det ifølge vores modeller *aldrig* har kunnet vekselvirke" ??? "Hvordan kan *alle* galakserne i afstanden fx $r_0^{\max}/2$ fra os vide, at de skal have netop de karakteristika, som de rent faktisk observeres at have, når de ikke kender (*og aldrig har kendt*) hinandens eksistens" ?

Et muligt svar på de stillede spørgsmål er: "Det er der ikke noget særlig mærkeligt i. Universet er fra starten skabt *fuldstændigt* isotropt". De fleste kosmologer synes, at dette er et utilfredsstillende svar, og der er i de sidste 20-30 år udfoldet store bestræbelser på at give en mere robust forklaring. En populær mulighed er at antage, at der i Universets meget, meget tidlige historie ($t \approx 10^{-35}$ s) fandt en ekstrem eksplosiv udvidelse sted over et yderst kortvarigt tidsrum. Fænomenet kaldes *inflation*, og tilstedeværelsen af en sådan udviklingsfase, er i dag i store træk alment accepteret af stort set alle førende kosmologer.

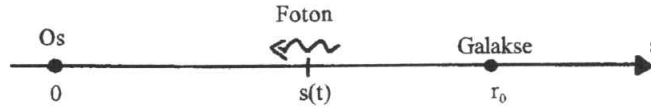
6.6 Horisonten flytter sig

Den del af Universet, som principielt er tilgængeligt for os, bliver større og større. I dag er grænsen ved galakser med medløberkoordinater $r_0^{\max}$, men efterhånden inddrages flere og flere galakser i vores lokale, observerbare Univers. Man kan også sige, at partikelhorisonten "indhenter" flere og flere galakser.

For at beskrive partikelhorisontens placering som funktion af tiden ses på (6.5) med $t_{\text{start}} = 0$:

$$s(t) = r_0 - \int_0^t \frac{dt}{\mathfrak{R}(t)}$$

I dette udtryk angiver $s(t)$ medløberkoordinaten til tiden t for en foton, der i selve Big Bang øjeblikket blev afsendt hen mod os fra en galakse med medløberkoordinaten r_0 . Se figuren.



Når fotonen er nået frem, er $s(t) = 0$: $r_0 = \int_0^t \frac{dt}{\mathfrak{R}(t)}$. Dette viser, at det betragtede integral har følgende fortolkning:

Funktionen $r_0^{\max}(t) = \int_0^t \frac{dt}{\mathfrak{R}(t)}$ angiver medløberkoordinaterne for de galakser, hvorfra der til tiden t kan være modtaget en foton

(6.11)

Eftersom $r_0^{\max}(t)$ for alle modeller er en voksende funktion af t , vil det i alle tilfælde gælde, at som tiden går, bliver mere og mere af universet principielt tilgængeligt. Indsættes $t = t_0$ fås ifølge (6.10) som forventet $r_0^{\max}(t_0) = r_0^{\max}$.

Afstanden $h(t)$ ud til partikelhorisonten til tiden t må være givet ved

$$h(t) = \mathfrak{R}(t) \cdot r_0^{\max}(t) \quad (6.12)$$

Hastigheden $v_h(t)$ af partikelhorisonten findes ved at differentiere:

$$v_h(t) = h'(t) = \mathfrak{R}'(t) \cdot \int_0^t \frac{dt}{\mathfrak{R}(t)} + \mathfrak{R}(t) \cdot 1/\mathfrak{R}(t) = \mathfrak{R}'(t) \cdot \int_0^t \frac{dt}{\mathfrak{R}(t)} + 1 \Leftrightarrow$$

$$v_h(t) = 1 + \mathfrak{R}'(t) \cdot r_0^{\max}(t) \quad (6.13)$$

Hastigheden af de galakser, der til tiden t passerer af partikelhorisonten, findes af udtrykket (1.5) $v(t) = \mathfrak{R}'(t) \cdot r_0$:

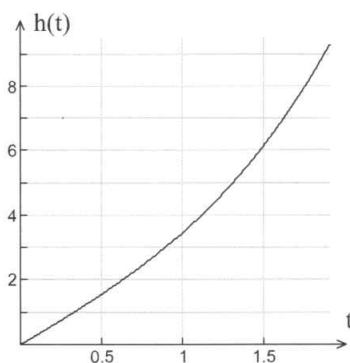
$$v_{\text{grænsegalakse}}(t) = \mathfrak{R}'(t) \cdot r_0^{\max}(t) \quad (6.14)$$

Sammenholdes (6.14) med (6.13) ses, at partikelhorisonten til enhver tid har en hastighed, der er 1 større end grænsegalaksernes hastigheder. Der hvor partikelhorisonten overhaler, overhales galakserne følgelig altid med lynets hast (det vil sige med overskudsfarten c).

År2003-modellen

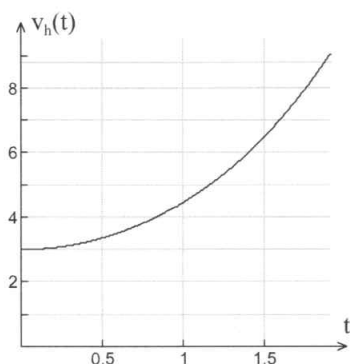
$$\mathcal{R}(t) = 0,4522 \cdot (e^{1,2816 \cdot t} - e^{-1,2816 \cdot t})^{2/3}$$

Partikelhorisonten som funktion af tiden



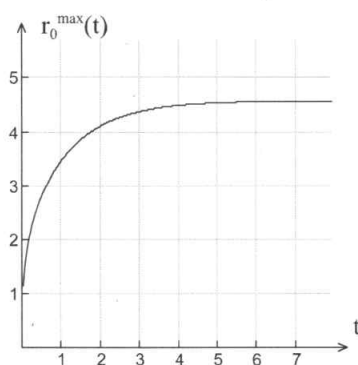
$h(t)$ ender med at vokse *eksponentielt* med tiden t

Hastigheden af partikelhorisonten



$v_h(t)$ vokser fra en startværdi på $3 \cdot c$. Accelerationen bliver større og større

Medløberkoordinaterne for partikelhorisonten



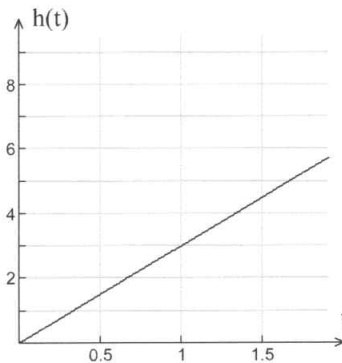
Grafen har vandret asymptote. Galakser med $r_0 \geq 4,6$ vil *aldrig* blive indhentet af partikelhorisonten, og vil således *for tid og evighed* være "uden for vores verden".

$$r_0 = 4,6 L_H = 4,6 \cdot 13,8 \text{ Gly} = 63 \text{ Gly}.$$

Einstein/de Sitter-modellen

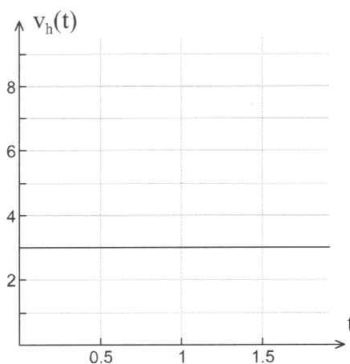
$$\mathcal{R}(t) = (3/2 \cdot t)^{2/3}$$

Partikelhorisonten som funktion af tiden



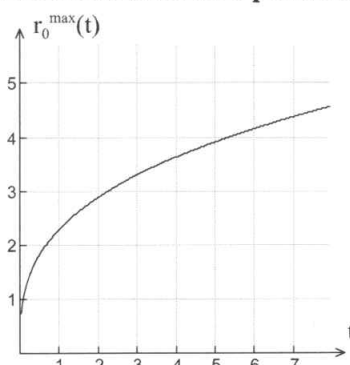
$h(t)$ vokser *lineært* med tiden t

Hastigheden af partikelhorisonten



$v_h(t)$ er konstant og lig $3 \cdot c$

Medløberkoordinaterne for partikelhorisonten



$r_0^{\max}(t) \propto t^{1/3}$ og vokser således mod uendelig. Med tiden indhenter partikelhorisonten følgelig selv de fjerneste galakser. Hele Universet bliver i sidste ende "en del af vores verden".

Opgaver

Opgave 101 Lysenheder

Længdeenheden 1 lysår er den afstand lyset i vacuum tilbagelægger på 1 år.

Lysets hastighed i vacuum er $c = 3,0 \cdot 10^8$ m/s.

- Udregn hvor mange km, der svarer til 1 lysår.
- Undertiden udtrykkes Solens afstand fra Jorden som 8,3 lys-minut. Hvad mon der menes med dette ?
- Udregn i km Solens afstand fra Jorden.
- Udregn i en passende "lys-enhed" afstanden til Månen.
(Afstanden fra Jorden til Månen er 384 tusinde km).

Opgave 102 Telefonbøger

Gør ved hjælp af passende antagelser rede for, at antal skriftegn i den på side 10 nævnte stak telefonbøger virkelig er af størrelsesordenen 10^{20} . (Afstanden til Solen er $1,50 \cdot 10^{11}$ m).

Opgave 103 Universets massetæthed

Antag at en gennemsnitsgalakse i Universet indeholder 10^{11} stjerner hver typisk med en masse som Solens, og at gennemsnitsafstanden mellem to nabogalakser er 1 Mly. Solens masse er $1,99 \cdot 10^{30}$ kg.

- Bestem en værdi for massetætheden i Universet. Angiv resultatet både i kg/m^3 og i u/m^3 .

Opgave 104 Usikkerhed

I (1.2) er angivet, at Hubbleparametren $H_0 = 0,0726/\text{Går}$ med en usikkerhed på 5 %.

- Beregn det tilhørende usikkerhedsinterval for H_0 .
- Beregn endvidere usikkerhedsintervallet for hubbletiden T_H (ønsket enhed: mia. år).
- Usikkerhedsintervallet for hubblelængden L_H ? (Ønsket enhed: mia. lysår).
- Eftervis rigtigheden af omskrivningen i (1.3).

Opgave 105 Egenbevægelse for galakser

I det virkelige Univers er ekspansionen ikke helt ensartet. Udover at den enkelte galakse deltager i den kollektive Hubble-ekspansion, har den også en såkaldt *egenbevægelse*, som hovedsagelig skyldes gravitationskræfter fra nabogalakserne. En typisk værdi for hastigheden af en egenbevægelse er $v_{\text{egen}} = 600$ km/s.

Antag nedenfor, at en galakses afstand r_0 og dens virkelige hastighed $v_0 \pm v_{\text{egen}}$ kan måles helt nøjagtigt, og at $H_0 = 0,0726/\text{Går}$.

- Hvor langt væk skal en galakse være væk, før man ud fra målte værdier af r_0 og $v_0 \pm v_{\text{egen}}$ kan bestemme Hubble-parametren med en nøjagtighed på 10 % ?

Opgave 106 Hubble-loven

- En galakse befinder sig i dag i afstanden 128 Mly. Beregn galaksens hastighed.
- En kvasar befinder sig i dag i afstanden 1,6 Gly. Beregn kvasarens hastighed.
- En galakses hastighed bestemmes til $8,2 \cdot 10^5$ m/s. Beregn galaksens afstand (ønsket enhed: ly).
- En galakses hastighed bestemmes til 99 % af lyshastigheden. Beregn galaksens afstand (ønsket enhed: ly).

Opgave 107 Einstein/de Sitter-universet

Betragt *Einstein/de Sitter-universet* beskrevet ved skalafaktoren $\mathfrak{R}(t) = 0,228 \cdot t^{2/3}$, (hvor det er underforstået, at t regnes i mia. år.

- Skitsér grafen for $\mathfrak{R}(t)$ i intervallet $0 \leq t \leq 35$. Starter det med et Big Bang ? Ender det med et Stort Knus ?
- Eftervis, at Universets alder er 9,2 mia. år.
- Beregn universets nuværende udvidelseshastighed og accelerations-parameter. Husk enheder.
- Hvor længe er det siden, at universet var halvt så stort som i dag ?
- Hvor længe varer det, før universet er blevet dobbelt så stort som i dag ?

Opgave 108 Et Sinus-univers

Betragt et såkaldt *Sinus-univers* beskrevet ved skalafaktoren $\mathfrak{R}(t) = 1,260 \cdot \sin(0,1087 \cdot t)^{2/3}$, hvor det er underforstået, at t regnes i mia. år.

- Skitsér grafen for $\mathfrak{R}(t)$ i intervallet $0 \leq t \leq 35$.
Starter det med et Big Bang? Ender det med et Stort Knus?
- Ligningen $\mathfrak{R}(t) = 1$ har to løsninger i det betragtede interval. Find disse to løsninger.
Argumentér for, at det må være den mindste løsning, som angiver t_0 .
- Beregn universets nuværende udvidelseshastighed og accelerations-parameter. Husk enheder.
- Hvor længe er det siden, at universet var halvt så stort som i dag?
- Om hvor længe ophører universet med at udvide sig og begynder at trække sig sammen?
- Bestem tidspunktet for dommedag.

Opgave 109 Milne-universet

- Gør rede for, at skalafaktoren $\mathfrak{R}(t) = 0,0725 \cdot t$ (t i mia. år) beskriver det såkaldte *Milne-univers*, som er omtalt side 18; altså et Big Bang univers hvor den enkelte galakses hastighed er konstant i tiden.
- Bestem ud fra skalafaktoren t_0 og $\mathfrak{R}'(t_0)$.

Opgave 201 Stjernespektre

I det målte spektrum for stjernen Capella findes den røde hydrogenlinje H_α ved bølgelængden 656,219 nm. Standardbølgelængden for H_α er 656,285 nm.

- Beregn rødforskydningen z .
- Gør rede for, om Capella bevæger sig imod os eller væk fra os.
- Beregn Capellas flughastighed.
- Ved hvilken bølgelængde optræder heliumlinjen med standardbølgelængden 447,152 nm i spektret for Capella?
- Samme spørgsmål a)-d) som ovenfor bare for stjernen Vega, i hvis spektrum H_α optræder ved bølgelængden 656,351 nm.

Opgave 202 NGC 4889

I spektret for den gigantiske, elliptiske galakse NGC 4889 måles den såkaldte K-calciumlinje ved bølgelængden 401,8 nm. Standardbølgelængden for K-calciumlinjen er 393,3 nm.

- Beregn rødforskydningen z .
- Beregn galaksens nuværende afstand og hastighed.
- Beregn den afstand, som galaksen havde på det tidspunkt, hvor den stråling, som vi modtager i dag, blev udsendt.

Opgave 203 Hydra

I spektret for galaksen Hydra måles K-calciumlinjen ved bølgelængden 475,2 nm. Standardbølgelængden for K-calciumlinjen er 393,3 nm. Hydras nuværende afstand er 2,7 Gly.

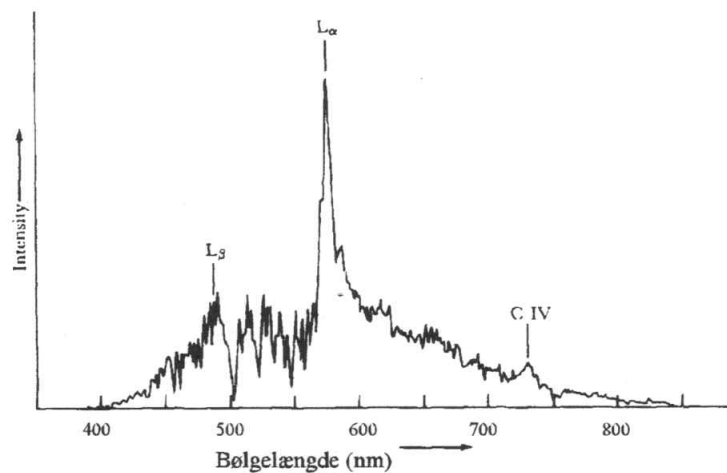
- Beregn Hydras nuværende hastighed.
- Beregn rødforskydningen z .
- Beregn den afstand galaksen havde på det tidspunkt, hvor den stråling, som vi modtager i dag, blev udsendt.
- Beregn ved hjælp af Hubble-loven Hydras hastighed.
- Beregn hver af de to størrelser $13,8 \text{ Gly} \cdot z$ og $c \cdot z$. Kommentér.

Opgave 204 Rødforskydningsrekord anno 1998

I 1998 målte for en galakse en rødforskydning på 5,64.

- Ved hvilken bølgelængde vil hydrogenlinjen L_α optræde i det observerede spektrum?
- Dagens bedste bud på denne galakses nuværende afstand er 27,0 Gly. Hvor langt væk var galaksen, da strålingen blev udsendt?
- Beregn galaksens nuværende hastighed.
- Beregn hver af de to størrelser $13,8 \text{ Gly} \cdot z$ og $c \cdot z$. Kommentér.

Opgave 205 Lyman-skove



På figuren ses spektret for kvasaren PKS 2000-330. Bemærk de mange kraftige absorptionslinjer til venstre for L_α . Disse kaldes under ét for *Lyman-skoven*, og skyldes tilstedeværelse af fjerne gasskyer mellem kvasaren og os.

- Bestem ved hjælp af figuren ved hvilken bølgelængde hver af de markerede emissionlinjer optræder. (Linjen markeret med C IV er en linje fra spektret af ioniseret carbon. Den har standardværdien 153 nm).
- Angiv de tilhørende farver.
- Udregn for hver af linjerne deres procentvise forskydning. Kommentér resultaterne.
- Forklar, hvordan Lyman-skovens "træer" bliver til.

Opgave 206 HE 1122-1628

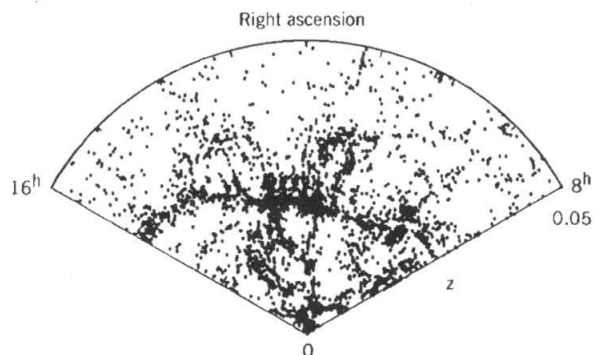
I spektret for kvasaren HE 1122-1628 ses en violet linje med bølgelængden 414 nm. Linjen kan identificeres som værende den rødforskudte hydrogenlinje L_α .

- Beregn rødforskydningen z .
- Løs ligning (2.5) $\mathcal{R}(t) = 1/(1+z)$ med hensyn til t , idet du som model bruger Einstein/de Sitter-universet. Hvilken fortolkning har det fremkomne tal?
- Løs ligning (2.5) $\mathcal{R}(t) = 1/(1+z)$ med hensyn til t , idet du som model bruger Λ CDM-universet. Hvilken fortolkning har det fremkomne tal?
- Ligger hydrogenlinjen H_δ i det synlige område af kvasarens spektrum?
- Hvor mange gange er Universet blevet større, mens strålingen fra kvasaren har været undervejs?

Opgave 207 The Great Wall. The Great Void

Figuren viser resultatet af en optælling af galakser bestemt ved en retning og en rødforskydning z . Det ses, at der i en bestemt afstand er en særlig stor tæthed af galakser. Dette er den såkaldte *Great Wall* af galakser, som blev opdaget i 1989.

- Vurder ud fra figuren afstanden ud til muren samt murens tykkelse.
- For $z \geq 0,06$ tiltager galaksetætheden igen. (Dette kan ikke ses på figuren). Området i rummet mellem The Great Wall og $z \approx 0,06$ kaldes *The Great Void*. Bestem tykkelsen af dette store tomrum.



Opgave 208 Beregning af afstande

- a) Eftersis, at der til $z = 4$ i År2003-universet svarer følgende størrelser:
 $t_e = 1,578$ Går, $r_0 = 23,9$ Gly og $r_e = 4,8$ Gly (jvf. teksten side 31).
- b) Betragt en kvasar med $z = 5$. Beregn t_e , r_0 og r_e ved hjælp af hver af de fire modeluniverser Kapitel 1 side 20. Kommentér resultaterne.

Opgave 209 Rødforskydningsrekord anno 2003

I januar 2003 blev opdagelsen af en kvasar med $z = 6,4$ annonceret.

- a) Vælg et passende modelunivers og bestem herudfra hver af de 7 manglende værdier i nedenstående (tænk) pressemeddelelse.

Rødforskydningsrekord
 Astronomer har netop opdaget en kvasar med en rekordstor rødforskydning på $z = 6,4$. Lyset fra kvasaren blev udsendt, da universet kun var ??? mlo. år gammelt, og det har været undervejs i ??? mla. år. Mens lyset har været undervejs, er hele Universet blevet ??? gange større.
 I dag er kvasaren ??? mla. lysår væk, og dens hastighed er ??? gange så stor som lyshastigheden. På udsendelsestidspunktet var kvasaren kun ??? mla. lysår væk, og dens hastighed kun ??? gange så stor som lyshastigheden.

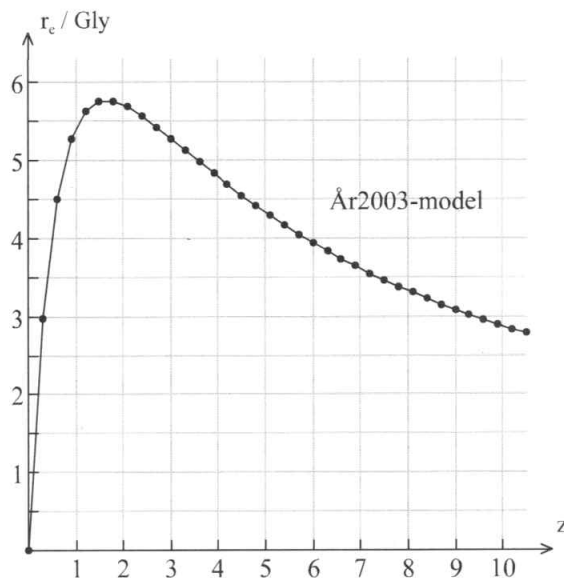
Opgave 210 Tre gange så hurtigt som lyset

Hvilken z -værdi i År2003-universet svarer til en flugthastighed på tre gange lyshastigheden ?

Opgave 211 Størsteafstand ?

Grafen viser r_e som funktion af z for År2003-modellen.

- a) Rigtigt eller forkert ?
 "Jo større z er, jo længere væk er galaksen".
 "Jo større z er, jo længere væk var galaksen på udsendelsestidspunktet".
- b) Aflæs de to z -værdier, som svarer til $r_e = 4$ Gly. Find de to tilsvarende udsendelsestidspunkter t_e .
- c) Grafen er kommenteret ved at henlede opmærksomheden på en løber på et løbebånd. Forklar !
- d) Aflæs koordinaterne til grafens maksimumspunkt. Hvilken betydning har hver af disse to størrelser?



Opgave 212 Flere horisonter

- a) Bestem i lighed med eksemplet side 32 partikelhorisonten for Einstein/de Sitter-universet og for Sinus-universet.
- b) Bestem endvidere for hver af de to universmodeller den rødforskydning z , som angiver den nedre grænse for galakser med overlyshastigheder.

Opgave 301 Mest stråling ?

- a) Ved hvilken bølgelængde udsender en genstand ved stuetemperatur mest stråling ?
- b) Ved hvilken bølgelængde udsender en glødetråd i en elektrisk pære mest stråling ?
(Temperaturen af glødetråden kan sættes til 3200 K).
- c) Menneskets øjne er mest følsomme for lys med bølgelængden 500 nm. Hvilken temperatur skal en genstand have, for at $\lambda_{\text{typisk}} = 500 \text{ nm}$?

Opgave 302 Solens stråling

Solens udstråling er tilnærmelsesvis sortlegeme-stråling med temperaturen 5800 K.

- a) Beregn λ_{typisk} . Hvor i det elektromagnetiske spektrum ligger denne bølgelængde ?
- b) Beregn F_{total} , samt Solens totale strålingseffekt.
(Solens radius er $7,0 \cdot 10^8 \text{ m}$).

Opgave 303 Pegefinger

Sæt arealet af spidsen af din pegefinger til 1 cm^2 .

- a) Beregn den samlede strålingsenergi stammende fra den kosmiske baggrundsstråling, som pr. sekund rammer spidsen af din pegefinger.
- b) Beregn den gennemsnitlige energi af den enkelte foton.
- c) Vurdér hvor mange baggrunds-fotoner, som rammer din pegefinger pr. sekund.
Der skulle iøvrigt være ca. lige så mange neutrinoer, men ingen har hidtil kunne registrere én eneste af dem !

Opgave 304 Hvor stor er Capella ?

Intensiteten af den stråling, som den klare stjerne Capella udsender, og som når frem til os, er $1,2 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2$. Afstanden til Capella er $4,3 \cdot 10^{17} \text{ m}$, og dens overfladetemperatur er 5200 K. Ud fra disse tre oplysninger kan størrelsen af Capella bestemmes !

- a) Beregn overfladearealet af en (tænkt) kugleskal med Capella i centrum og med radius $4,3 \cdot 10^{17} \text{ m}$.
- b) Beregn hvor meget strålingsenergi fra Capella, som i alt pr. sekund strømmer ud gennem denne kugleskal.
- c) Argumentér for, at den fundne effekt kan sættes lig Capellas samlede udstrålings effekt.
- d) Bestem nu ved hjælp af Stefan-Boltzmanns lov Capellas overfladeareal.
- e) Beregn endelig Capellas radius og sammenlign den med Solens, der er $7,0 \cdot 10^8 \text{ m}$.

Opgave 305 Mindstetemperatur

Betragt Sinus-universet fra Kapitel 1 side 20.

- a) Bestem den mindste værdi, som Universets temperatur kommer ned på, før temperaturen begynder at stige og stige.

Opgave 306 Antal galakser i Universet

Den nuværende afstand ud til *the surface of last scattering* er som nævnt i teksten ca. 46 Gly. Antag at en typisk galakse har massen 10^{11} solmasser. (Dette er iøvrigt også massen af vor egen Mælkevej). Solens masse er $1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.

- a) Vurdér antallet af galakser i det "tilgængelige" univers.
- b) Efters, at den nævnte afstand i År2003-universet er 46 Gly, idet du går ud fra, at $z = 1098$.

Opgave 307 Tidlige Big Bang universer

Man kan vise, at alle Big Bang universer i den allerførste fase kan beskrives ved skalafaktoren

$$R(t) = 1,80 \cdot 10^{-10} \cdot \sqrt{t}, \text{ hvor det er underforstået, at tiden } t \text{ regnes i sekunder.}$$

- a) Beregn temperaturen i et 1 minut gammelt Big-Bang univers.
- b) Beregn den tilsvarende massetæthed ρ_{stof} . Udtryk resultatet i enheden g/cm^3 .
- c) Hvor gamle skal de betragtede universer være, før ρ_{stof} bliver lig med vands massefylde ?
- d) Temperaturen i Solens indre er 10^7 K . Hvor gamle er de betragtede universer være, når de har samme temperatur ?
- e) På CERN's Collider-accelerator opnås partikelenergier af størrelsesordenen $100 \text{ GeV} = 16,0 \text{ nJ}$. Til hvilket tidspunkt lignede de naturlige forhold i Universet de kunstige frembragte forhold på CERN ?

Opgave 308 Jorden som mørkt stof ?

Betrakt et tilfældigt udsnit af Universet. Udsnittet tænkes at være en regulær kasse med sidelængden 1 Gly.

- Beregn kassens volumen i m^3 .
- Beregn massen af alt stof (almindeligt plus mørkt stof) i kassen. Angiv resultatet i kg.
- Vurdér antallet af galakser i kassen, idet du antager, at en typisk galakse har massen 10^{11} solmasser, hvilket svarer til $2,0 \cdot 10^{41}$ kg.
- Beregn massen af det mørke stof i kassen.
- Hvis det antages, at al det mørke stof optræder i form af Jord-lignende objekter, hvor mange "Jorde" skulle der så være i kassen ? (Jordens masse er $5,97 \cdot 10^{24}$ kg).
- Hvor mange "Jorde" er det pr. galakse ?
- Hvor mange "Jorde" er det pr. stjerne ? (Antag at en typisk galakse indeholder 10^{11} stjerner).
Kommentér resultatet.

Opgave 309 Neutrinoer som mørkt stof ?

Man kan vise, at antallet af "almindelige" kosmiske baggrunds-neutrinoer udgør ca. 32 % af antallet af kosmiske baggrunds-fotoner.

- Beregn antallet af "almindelige" neutrinoer pr. m^3 .
- Det antages nu, at hver af neutrinoerne har massen m_ν . Bestem m_ν (i kg), så den samlede masse af alle de "almindelige" neutrinoer pr. m^3 netop svarer til massen af det mørke stof.
- Sammenlign resultatet med elektronens masse $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg.
- I de seneste år er det fastslået, at neutrinoer virkelig har en masse; deres (hvile)masser er således *ikke* nul. For "almindelige" neutrinoer vurderes deres masse m_ν at ligge i intervallet $0,2 \cdot 10^{-7} m_e \leq m_\nu \leq 2 \cdot 10^{-7} m_e$.
Er de "almindelige" neutrinoer seriøse kandidater til at være væsentlige bidragsydere til mørke stof ?

Opgave 310 Neutrinobidrag til $\rho_{\text{stråling}}$

Under den antagelse, at neutrinoernes (hvile)masse er nul, så udgør de kosmiske baggrunds-neutrinoers samlede energitæthed 68 % af energitætheden af den kosmiske baggrundsstråling.

- Bestem den samlede energitæthed af baggrunds-neutrinoerne og af baggrunds-fotonerne.
- Beregn den tilsvarende massetæthed og sammenlign med $\rho_0^{\text{stof}} = 2,4 \cdot 10^{-27} \text{ kg/m}^3$.

Opgave 311 Det første døgn ?

Ifølge teksten side 43 så svarer observationen af den kosmiske baggrundsstråling i Universet aldermæssigt til at observere et 80-årigt menneske i dets første levedøgn.

- Eftervis dette.

Opgave 312 Tre sandkorn i en katedral

Citat: "Anbring tre sandkorn i en katedral, og denne katedral vil være mere tætpakket med sand, end rummet er med stjerner". Udtalt af den fremtrædende engelske astronom Sir James Jeans i 1929.

- Er denne menneskealder-gamle påstand sand i dag ?
(Du skal selv foretage passende antagelser fx om størrelsen af et sandkorn, ...).

Stikordsregister

acceleration (rummets) 16
accelerationsparameter 16, 62, 66, 80
afstand og rødforskydning 30, 31, 78
afstandsformlen 31, 82
alder (Universets) 20, 32, 67
Andromeda 9

Big Bang 18, 54
Big Crunch 18
blåforskydning 24

cepheider 8
COBE 38, 46
cykloide-universer 77

de Sitters model 56, 58
Doppler-effekt 26
Doppler-formlen 26

Eddington 48
Einstein 48
Einsteins model 55, 58
Einstein/de Sitter model 20, 57, 58, 89
energitæthed 40, 52
euklidisk geometri 53

fladt univers 53
Fotonafkoblingen 42
fotoner i Universet 42, 80
foton-temperatur 39
Friedmann 51
Friedmann-ligningen 49, 60, 64, 69
Friedmann-universer 49, 63, 70

galakser 9
galaksehobe 10
galaksespektre 24, 27
(The) Great Void 91
(The) Great Wall 91

horisont 83
horisontproblemet 84
Hubble 9, 11
Hubble-loven 11, 16
Hubblelængden 17
Hubbleparameter 11, 17, 80
Hubbletiden 17
hyperbolsk geometri 53

Kant 9
Kernesyntesen 45
kosmiske baggrundsstråling 38
kosmologiske princip 15, 16
kritisk massetæthed 57
krumning 53, 62, 66
krumningsradius 53
kvasarer 24, 25
kvasarspektre 24, 25, 27

lambda-kraften 51
Lemaître 73
lepton 44
lepton-epoken 43
linjespektrum 21
Lyman-skove 91
lysår 89

massetæthed 40, 52, 57, 89
massetæthedsparameter 60, 62
medløberkoordinater 80
Milne model 18, 20, 56, 58, 90
Mælkevejen 7, 9
mørkt stof 41, 94

neutrinoer 44, 45, 94
Newton 49

overlyshastigheder 32, 81

partikelhorisont 32, 83
Penzias 38
Planck 33, 35
Planck-fordeling 33, 37
Planck-kurver 34, 35, 38
Planeterne 7
Principia 49

Rekombinationen 42
relativitetsteori 48
rosinkage model 13
rødforskydning 23, 24, 28
rødforskydning og afstand 30, 31, 78

sfærisk geometri 53
Sinus-univers 20, 90
skalafaktoren 16, 75
Solsystemet 8
sortlegeme-stråling 33, 36, 37
spektroskopi 23
spektrum 22
standardspektrum 21
standardbølglængde 24
standardenheder (kosmologiske) 59
Stefan-Boltzmanns lov 36
stjernespektre 23, 25, 90
stofdominans 41
Store Brag 18
Store Knus 18
stjernetåger 9
strålingsdominans 41
størrelsesforhold 10
støv-univers 49
surface of last scattering 43

temperatur (Universets) 39
temperaturfluktuationer 46
tomme universer 76

udvidelseshastighed 16

vacuumenergitæthed 52
vacuummassetæthed 52
vacuumtæthedsparameter 60, 62

Wiens forskydningslov 34
Wilson 34
WMAP 46

Ar2003 model 20, 32

Forslag til supplerende læsning

Edward Harrison:
Cosmology - The Science of The Universe
Cambridge University 2000

Olaf Pedersen & Helge Kragh:
Fra Kaos til Kosmos - Verdensbilledets historie gennem 3000 år
Gyldendal 2000

Andrew Liddle:
An Introduction To Modern Cosmology
John Wiley & Sons 1999

Barbara Ryden:
Introduction To Cosmology
Addison Wesley 2003

Michael Rowan-Robinson:
The Nine Numbers of The Cosmos
Oxford University Press 1999

Stuart Clark:
Towards The Edge of The Universe - A Review of Modern Cosmology
John Wiley & Sons 1997

Martin Rees:
Before The Beginning - Our Universe And Others
The Free Press 1997

John Hawley & Katherine Holcomb:
Foundations of Modern Cosmology
Oxford University Press 1998

Stephen Webb:
Measuring The Universe - The Cosmological Distance Ladder
Springer 1999

Steven Weinberg:
The First Three Minutes - A Modern View of The Origin of The Universe
André Deutsch 1978

Michael Berry:
Principles of Cosmology And Gravitation
Cambridge University 1976

Konstanter

Naturkonstanter

Gravitationskonstanten	$G = 6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$
Lysets hastighed i vacuum	$c = 2,9979 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
Boltzmanns konstant	$k = 1,38066 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Stefan-Boltzmanns konstant	$\sigma = 5,6705 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K}^4)$
Plancks konstant	$h = 6,62608 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$

Omregningsfaktorer

1 år = 1 y = $3,156 \cdot 10^7 \text{ s}$
1 lysår = 1 ly = $9,47 \cdot 10^{15} \text{ m}$
1 parsec = 1 pc = $3,261 \text{ ly} = 3,09 \cdot 10^{16} \text{ m}$
1 atommasseenhed = 1 u = $1,66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Kosmologiske parametre *)

Hubble-parametren (bedste bud)	$H_0 = 0,0726/\text{Går} = 2,30 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$
Hubble-længden (bedste bud)	$L_H = 13,8 \text{ Gly}$
Hubble-tiden (bedste bud)	$t_H = 13,8 \text{ mia. år} = 4,36 \cdot 10^{17} \text{ s}$
Hubble-parametren (usikkerhedsinterval)	$H_0 = (0,0726 \pm 0,0036)/\text{Går}$
Universets nuværende stofmassefylde	$\rho_0 = 2,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg/m}^3 = 1,56 \text{ u/m}^3$
Den kritiske massefylde	$\rho_c = 3H_0^2/(8\pi G) = 9,5 \cdot 10^{-27} \text{ kg/m}^3 = 5,7 \text{ u/m}^3$
Massetæthedsparametren	$\Omega_0 = \rho_0/\rho_c = 0,27$
Den kosmologiske konstant	$\Lambda = 1,16 \cdot 10^{-35} \text{ s}^{-2}$
Vacuumtæthedsparametren	$\Omega_\Lambda = \Lambda/(3 \cdot H_0^2) = 0,73$

*) WMAP Best-Fit Cosmological Parameters

http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/wmap_parameters.cfm (April 2003)

ISBN 87-7792-026-0



9 788777 920264